GEOMETRIA DESCRIPTIVA
Y
PROYECTIVA

HUGO DURAN CANELAS BANEGAS
VALERIA DA COSTA VACA

Editorial e Imprenta Universitaria

Obra: Geometría Descriptiva y Proyectiva
Autores: Hugo Durán Canelas Banegas
Valeria Da Costa Vaca

Primera Edición, septiembre 2019

Depósito Legal:
8-1-321-19 PO.

Diagramación y composición:
Richard Soliz Q.

Impresión:
Editorial e Imprenta Universitaria
Universidad Autónoma “Gabriel René Moreno”
Santa Cruz de la Sierra - Bolivia

A nuestras madres:

Yolanda Banegas Justiniano
y
María Vaca Viquiña

AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento a los colegas de docencia de la Familia Moreniana, sin cuyo apoyo no hubiera sido posible la realización del presente trabajo; no quiero mencionar nombres por no pecar de injusto ante posible omisión

PRÓLOGO

Es un gusto presentar esta edición complementaria a las anteriores con la novedad de mostrar los gráficos a colores para una mejo comprensión por parte de nuestros estudiantes de la facultad de Tecnología en sus carreras de ingeniería Civil e Ingeniería Electromecánica.

Es nuestra esperanza que la presente obra llegue a cubrir las falencias que puedan haber presentado las ediciones anteriores presentadas en blanco y negro.

La Geometría Descriptiva es una ciencia que inicialmente el estudiante la ve árida, pero con el esfuerzo de este trabajo y la abnegada presentación de sus maestros, pueda dar excelentes frutos en quienes reciban las enseñanzas en clases que pretenden ser magistrales.

Agradecemos la colaboración dada por nuestras Autoridades para hacer realdad la impresión de esta obra y hacerlas llegar al estudiantado desinteresadamente.

Los Autores

I N D I C E

PRIMERA UNIDAD

PROYECCION: SUS CLASES:

La proyección de un punto A del espacio, sobre un plano **a,** desde otro punto **o** del espacio exterior a él es la intersección del **rayo proyectante AB** con el plano α. El punto **o**, se llama **centro de proyección,** y el plano **a** sobre el que se proyecta, **plano de proyección**.

Todos los puntos del rayo proyectante **AB**,como A (fig. 1), se proyectan en el punto **a**; y si el punto está en el plano, se confunde con su proyección como ocurre con C (fig. 1). Esta proyección recibe el nombre de **central**, **cónica**, **o perspectiva**. Sus propiedades más importantes son:

- La proyección de una recta, es otra recta que se obtiene uniendo las proyecciones **c** y **d** de dos puntos cualesquiera C y D de la misma en el espacio. (fig. 2) Esta proyección es asimismo la intersección o **traza** del plano OCD con el plano de proyección α.Todas las rectas contenidas en el plano se confunden con la recta CD. Para determinar la proyección **ab** de un segmento AB, basta unir las proyecciones de sus extremos. Si la recta pasa por el centro de proyección se confunde con el punto **t** (fig. 2)

- Si dos rectas son concurrentes, se cortan en un punto **C**; sus proyecciones también se cortarán en la proyección de su intersección (fig. 3), pues el punto de intersección de ambas,C, al serles común, lo será también en **c**, (proyección de C).

- Las proyecciones de dos o más rectas R y S, parelelas entre sí, son por lo general dos rectas concurrentes **r** y **s** (fig. 4).

Por geometría se sabe que si dos planos pasan por dos rectas paralelas, su intersección es paralela a ellas, por tanto, como los planos proyectantes de ambas rectas, pasan por ellas por el centro de proyección, su intersección OF es paralela a ellas, y como las proyecciones que buscamos son precisamente las intersecciones **r** y **s** del plano con los rayos proyectantes, es decir con el diedro de arista OF, ambas concurrirán en el punto F.

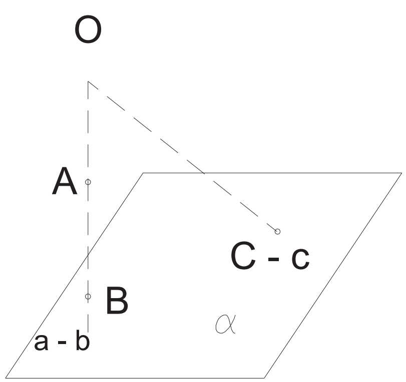


Fig. 1

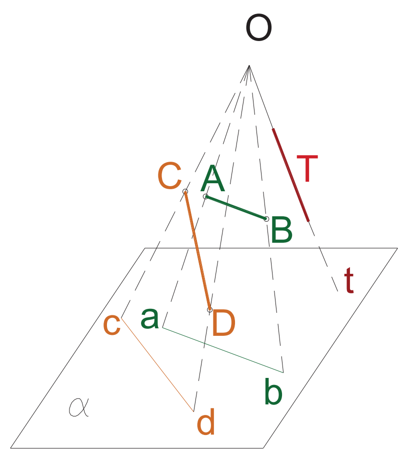


Fig. 2

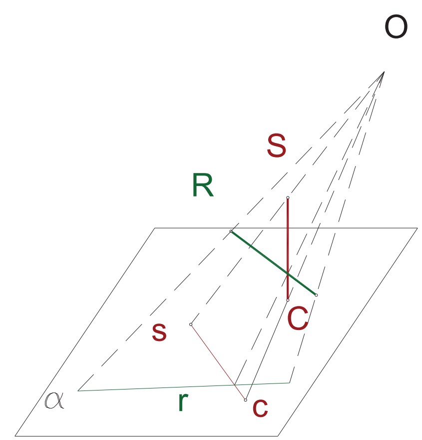


Fig. 3

Si las rectas además de ser parelelas entre sí, son paralelas al plano, las intersecciones se cortarán en el infinito y por tanto son paralelas.

- La proyección de una curva, es otra curva similar a la del espacio (fig. 5) Todas las rectas como las de la figura indicada, que sean tangentes o secantes o curvas en el espacio, lo serán también como tales en su proyección sobre el plano.

Proyección cilíndrica: Hemos visto que el centro de proyección era un punto, pero puede ocurrir que sea un punto impropio o en el infinito, en cuyo caso los rayos protectantes serán paralelos y en este caso la proyección se llama **cilíndrica** o **paralela**. (fig. 6)

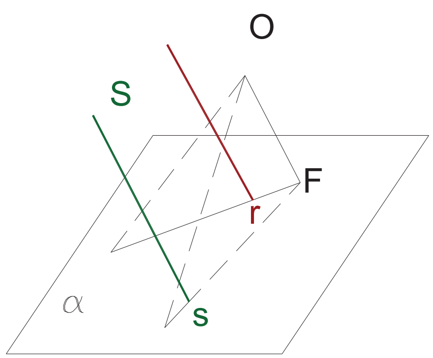


Fig. 4

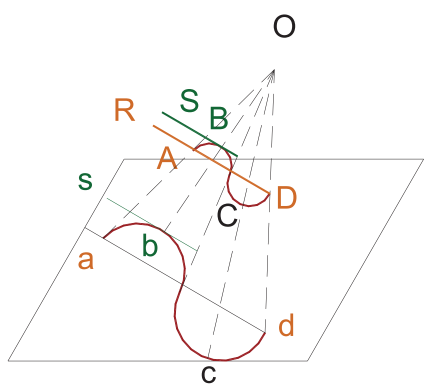


Fig. 5

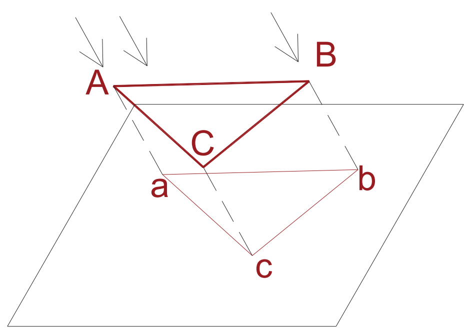


Fig. 6

Esta a su vez se divide en cilíndrica, oblíicua u ortogonal, según que los rayos sean paralelos, oblícuos o perpendiculares al plano de proyección.

La proyección cilíndrica de una figura situada en un plano paralelo al de proyección, es otra figura igual a ella.

La proyección de dos o más rectas paralelas entre sí son también paralelas entre ellas

Objeto de la Geometría Descriptiva: El objetivo de la materia es proporcionar al técnico la manera de representar sobre el plano, las diversas figuras del espacio para poder resolver con elementos de geometría plana, los problemas con los elementos del espacio.

Sistemas de Representación: son:

- diédrica, de doble proyección o Monge
- acotada
- axonométrica
- cónica o central

Entre los tres primeros sistemas, se emplea la proyección ortogonal; en el cónico, la cónica o central.

La condición fundamental que debe presentar todo sistema, es la **reversibilidad**, es decir, obtener sus proyecciones sobre el plano, u obtener por ellas, la figura del espacio.

Convenios y notaciones: En la representación gráfica de todos los elementos que se utilicen en esta disciplina, se tendrá en cuenta las siguientes convenciones:

- **Puntos en el espacio:** se utiliza letras mayúsculas, **A, B, C,** etc.
- **Puntos en proyección:** se utilizará las mismas letras, pero minúsculas, es decir, que las proyecciones de los puntos antes mencionados, serán, **a, b, c**, etc.
- **Planos:** para su nominación, se utilizarán letras del alfabeto griego: α, β, χ,

Además hay algunos elementos que por conveniencia serán nominados de manera especial, como por ejemplo:

- Los planos proyectantes se nominarán con la letra griega τ.
- Las rectas de intersección serán nominadas con la letra **I**.
- Los ejes, en giros, se nominarán con la letra **e**.

Reglas para el dibujo: La forma de representación en el dibujo será como sigue:

Rectas, visibles, en trazo contínuo: a ______________ b

Rectas invisibles, segmentadas: a — — — — — — — — — b

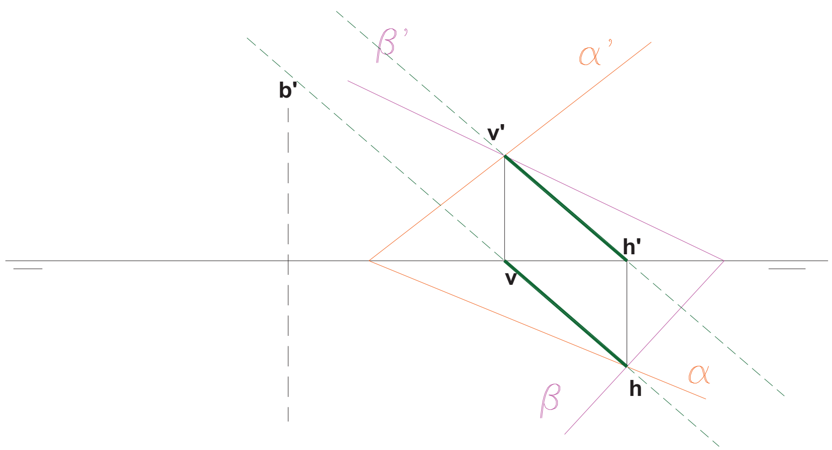


Fig. 7

Unión de proyecciones, punteadas: a'

a

Líneas auxiliares, con trazo fino. (fig. 7)

SEGUNDA UNIDAD

SISTEMA DIEDRICO O MONGE

GENERALIDADES: Los elementos fundamentales de este sistema son los dos planos de proyección: **horizontal** (H) y **vertical** (V), perpendiculares entre sí, colocados en posición horizontal y vertical respectivamente.

Como se los considera indefinidos, dividen el espacio en cuatro sectores llamados cuadrantes, representados con los números: I, II, III y IV. Así, cualquier punto del espacio puede ser representado en este sistema. (fig. 8)

La intersección de estos dos planos de proyección se llama **línea de tierra**, LT; divide a éstos en dos semiplanos, horizontal anterior y posterior, y vertical superior e inferior. Como el observador se lo supone colocado en el primer cuadrante, se considera como horizontal anterior y vertical superior, los semiplanos que determinan el primer cuadrante. (fig. 9)

El objeto de la geometría descriptiva es **representar sobre un plano** las figuras del espacio, y en este sistema se utilizan los dos planos de proyección, lo que a primera vista no se cumple con la condición primordial mencionada anteriormente. Para conseguir esta doble representación, se realiza la siguiente operación: primeramente se proyecta la figura sobre cada uno de los planos de proyección, y una vez ésto realizado, se gira el plano V alrededor de la línea de tierra en sentido contrario a las manecillas del reloj (fig.8) hasta ubicarlo en coincidencia con el plano H.

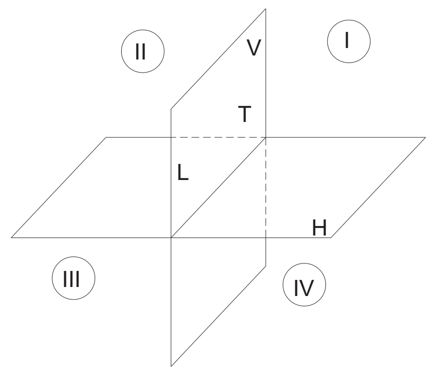


Fig. 8

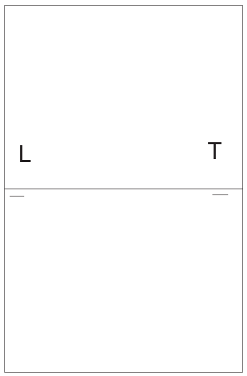


Fig. 9

Así se obtiene un plano que es el utilizado para todo trabajo de esta materia, sobre el que se señalará como referencia la línea de tierra, y bajo la misma y a cada extremo, se dibujará dos trazos que nos indican el sentido del giro (fig. 9). Los trazos colocados debajo de la LT, señalan que el horizontal anterior se confunde con el vertical inferior, en tanto que lo del plano vertical, con el horizontal posterior.

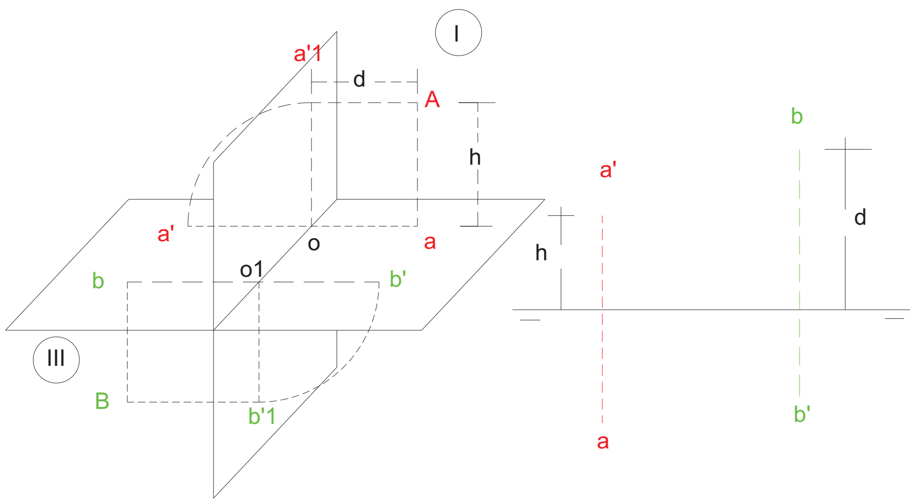


Fig. 10

Fig. 11

REPRESENTACION DEL PUNTO: Sea A un punto cualquiera del espacio. Primero se proyecta en **a'1** y **a**, ortogonalmente a los planos de proyección (fig. 10) y a LT que será cortada según **oa** y **oa'1**, que al girar como se indicó líneas arriba. quedará en **oa–o'a'**, perpendicular a LT (fig. 11). Las proyecciones **a** y **a'**, se llaman proyecciones **horizontal** y **vertical**respectivamente. La primera se representa con una letra minúscula, y la segunda con la misma letra, afectada por una comilla (').

La condición general que deben reunir las dos proyecciones de un punto, es que el segmento que las une sea perpendicular a la linea de tierra (LT).

La reversibilidad de este sistema es demostrable, es decir que de las proyecciones se puede llegar al punto del espacio. En efecto, si **a'** y **a** son las proyecciones del punto, deshaciendo el giro del plano vertical, **a'** se colocará en **a'1**, y trazando por **a** y **a'1** las proyectantes **Aa** y **Aa'1**, se cortarán en un punto **A** del espacio. Si **a** y **a'** no estuvieran situadas en la misma perpendicular a la línea de tierra, las proyectantes citadas, se cruzarán, no deterinando por tanto ningún punto (fig. 10)

La distancia de la LT a la proyección vertical del punto se llama **cota**, y a la horizontal **alejamiento:**

$$h = Aa = oa'1 = oa'$$
$$a = Aa'1 = oa$$

de ahí se deducen las siguientes reglas:

La cota de un punto viene dada por la distancia de la proyección vertical a la LT, y el alejamiento, por la distancia de la proyección horizontal a dicha línea; o también: **la distancia de un punto a uno de los planos de proyección, viene dada por la distancia de la proyección de nombre contrario a LT.**

Si la proyección horizontal de un punto está situada debajo, en o encima de la LT, el punto se encuentra delante, en o detrás del plano vertical.

Si la proyección vertical está encima, en o debajo de LT, el punto se encuentra encima, en o debajo del plano horizontal.

LAS TRECE (13) POSICIONES DEL PUNTO: En las figuras 10 y 11 se han ubicado los puntos **A** y **B,** situados en el primer y tercer cuadrante.

Todo punto situado en el primer o tercer cuadrante, tiene una proyección a cada lado de la línea de tierra, encontrándose la horizontal debajo y la vertical encima de licha línea, si está situada en el primer cuadrante, y a la inversa, si pertence al tercero.

Todo punto situado en el segundo o cuarto cuadrante tiene sus proyecciones situadas en el mismo lado de la línea de tierra, encima de ella si pertenece al segundo cuadrante, o debajo, si está en el cuarto. (fig. 12 y 13)

Aparte de los consabidos planos de proyección, vertical y horizontal, se crea en este sistema de proyecciones, otro juego de planos también ortogonales entre sí, pero girados 45º respecto de los originales, previéndose para ellos una forma de proyección similar al señalado para el sistema de planos vertical y horizontal; es por esta razón que los puntos situados en ellos, (los bisectores), están sometidos a la siguiente regla:

Todo punto situado en uno de los bisectores, tiene sus proyecciones equidistantes de la línea de tierra, estando una a cada lado de ella, si pertenece al primer bisector o confundidas si pertenece al segundo. (fig. 16 y 17)

Si un punto está situado en uno de los planos de proyección, su proyección de nombre contrario, está situada en la línea de tierra. (fig. 14 y 15)

Todo punto situado sobre la línea de tierra, tiene sus proyecciones confundidas en ella. (fig. 14 y 15)

REGLAS PARA EL DIBUJO: Si para todo trabajo de geometría plana o del espacio, es muy importante tener claridad y exactitud para el dibujo, con más razón, en Geometría Descriptiva, lo es, como el técnico podrá ver después de comenzar a entrar al planteo y resolución de problemas que se puedan presentar en esta disciplina.

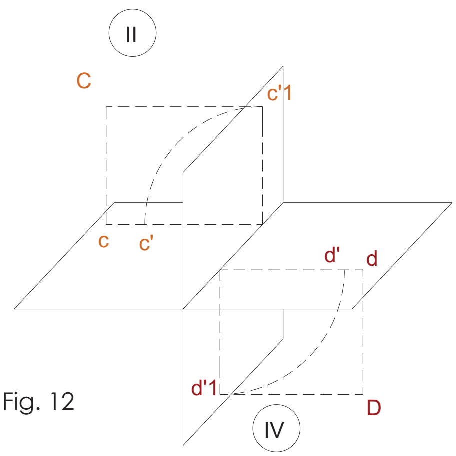


Fig. 12

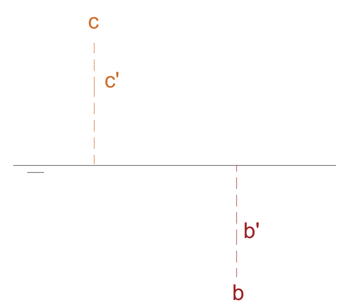


Fig. 13

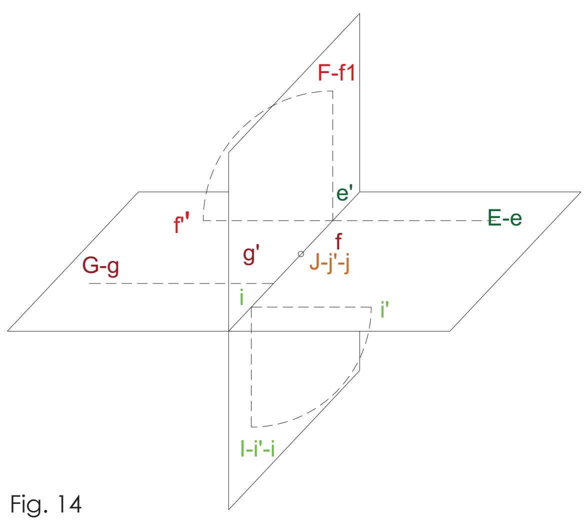


Fig. 14

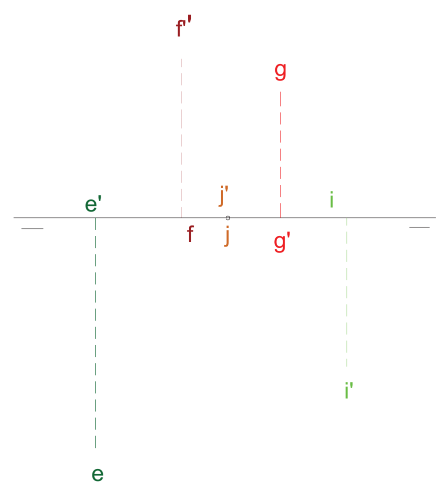


Fig. 15

Es pues de gran utilidad dibujar las figuras, con claridad y distinguir los datos, del resultado o de las líneas auxiliares; de ahí que **la pulcritud y claridad en el dibujo se hacen necesarias e imprescindibles.** Por esta razón hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

1) La línea de tierra y las proyecciones de los datos, se dibujarán en trazo contínuo y fino.

2) Las líneas de referencia (unión de proyecciones), con trazos pequeños finos.

3) Las proyecciones del resultado, con trazo contínuo y grueso.

4) Las proyecciones de las líneas auxiliares, de trazo y punto fino.

5) Las partes **ocultas**, de trazos o líneas discontínuas, para distinguirlas de las **vistas**, o situadas en el primer cuadrante.
6) Las partes vistas y ocultas, ayudan mucho a ver en el espacio, lo proyectado.

7) No bien se vaya dibujando o realizando trazos en la resolución de problemas, se deberá ir colocando sus respectivos nombres o señales, a fin de evitar posteriores confusiones (fig. 7)

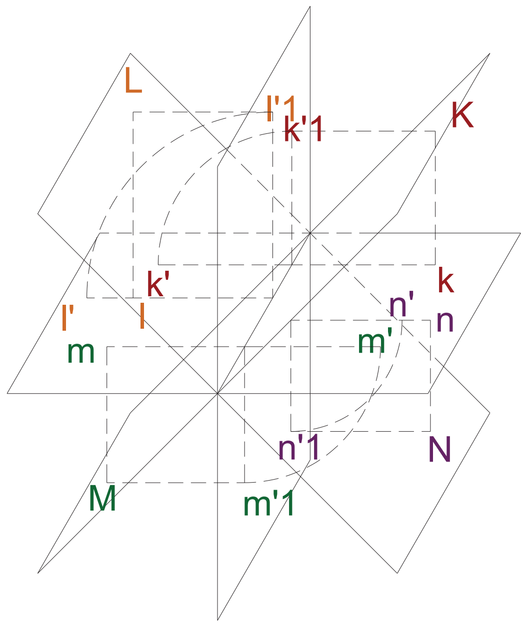


Fig. 16

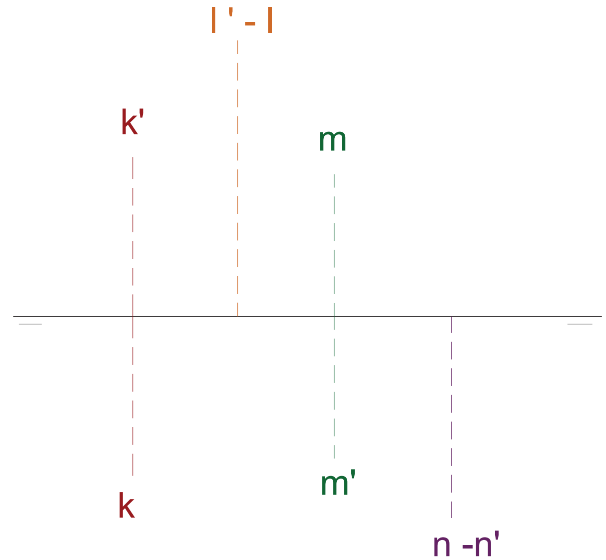


Fig. 17

REPRESENTACION DE LA RECTA: Para hallar la prouyección de una recta, basta hallar las proyecciones homónimas de dos de sus puntos.

En la fig. 18, la recta es **R**, y sus proyecciones son r y r '.

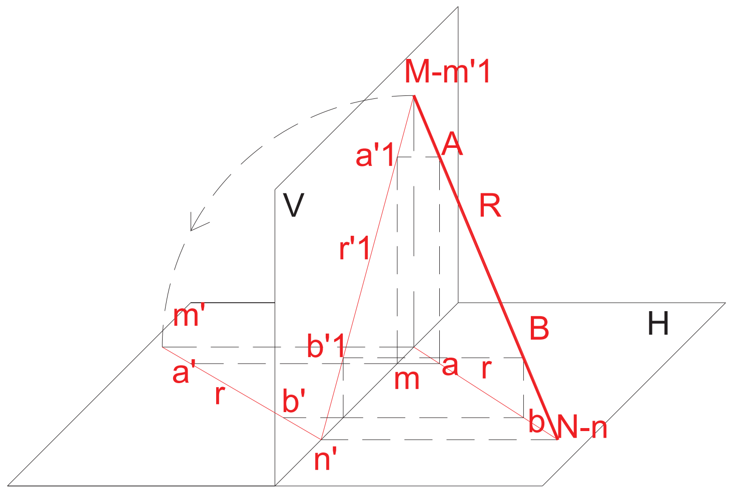


Fig. 18

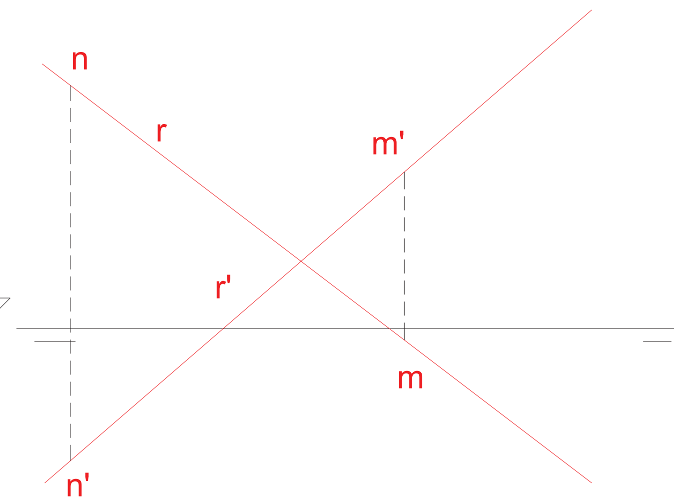


Fig. 19

Las proyecciones de la recta deben contener las proyecciones homónimas de los puntos **A** y **B,** o lo que es lo mismo, las proyecciones de la recta son la unión de las proyecciones homónimas de los puntos de la misma. Por ejemplo la proyección vertical **r'** de la recta **R,** une las proyecciones vertiales **a'** y **b'** , etc de los puntos **A, B** . Lo mismo diremos de las proyecciones horizontales.

La proyección horizontal **r** , es la intersección o traza con el plano horizontal del plano determinado por las proyectantes **Aa** y **Bb** del plano proyectante horizontal de la recta. Del mismo modo, la proyección vertical **r ',** es el abatimiento de la traza **r '1** del plano proyectante vertical de la recta **R**.

No confundir **proyección** y **proyectante**. No es lo mismo decir: **proyección horizontal de A,** que **proyectante horizontal de A.** En el primer caso nos referimos al punto **a**, situado en el plano horizontal, y en el segundo, a la recta perpendicular **Aa** a dicho plano.

Culquier par de rectas como la **r – r'**, puede ser la proyección de una recta **R** del espacio. (fig. 19) En efecto, si desabatimos la recta **r – r'** (fig. 18), mediante planos proyectantes que parten de dicha proyección, nos encontraremos con la recta. Se exeptúa la recta que es perteneciente a un plano perpendicular a ambos planos de proyección, o de perfil, que goza de cualidades especiales, las mismas que se verán al tratar el capítulo de abatimientos.

Si en la fig. 18, **A** pertenece a la recta **R**, sus proyecciones **a–a'** deben estar sobre **r y r'** respectivamente; de ahí la regla:

Para que un punto esté situado en una recta, sus proyecciones deben estar sobre las proyecciones homónimas de la recta, como ocurre con **M N,** (fig. 19).

Como en lo dicho anteriormente, se exceptúa la recta de perfil.

PUNTOS NOTABLES DE LA RECTA: Los puntos notables de una recta son sus intersecciones o **trazas** con los planos de proyección y con los bisectores.

En la fig. 18 se ve que los puntos **M** y **N** son las trazas de la recta con el vertical y el horizontal, que se denominan respectivamente: **traza vertical** y **traza horizontal** de la recta. Las intersecciones con los bisectores se llaman: **traza con el primer bisector** y **traza con el segundo bisector**.

De lo observado en la mencionada figura 18, deducimos la siguiente regla:

Para hallar la traza horizontal h–h' de una recta, se prolonga su proyección vertical hasta su intersección h' con la línea de tierra, y por ese punto, se levanta una perpendicular a LT hasta su intersección h con la otra proyección de la recta.

Análogamente, para la traza vertical, se deduce la siguiente regla:

Para hallar la traza vertical v – v' de una recta, se prolonga su proyección horizontal hasta su intersección v con LT, y por ese punto se levanta una perpendicular a LT hasta su intersección v' con la otra proyección.

Para ambas trazas ver la fig. 20

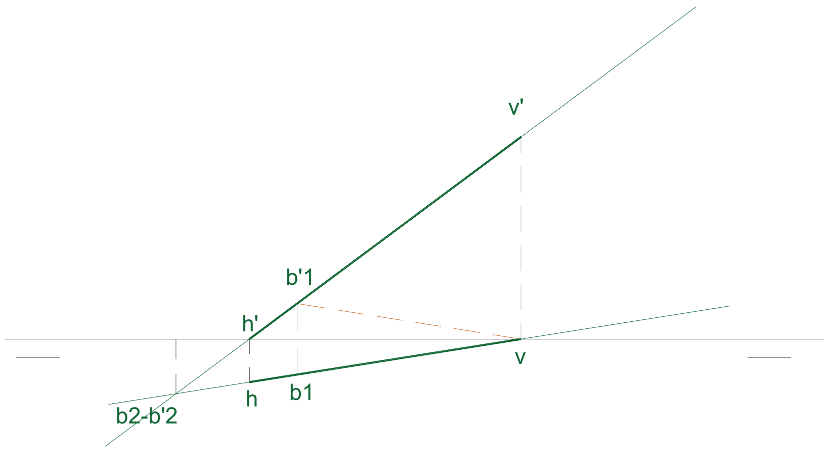


Fig. 20

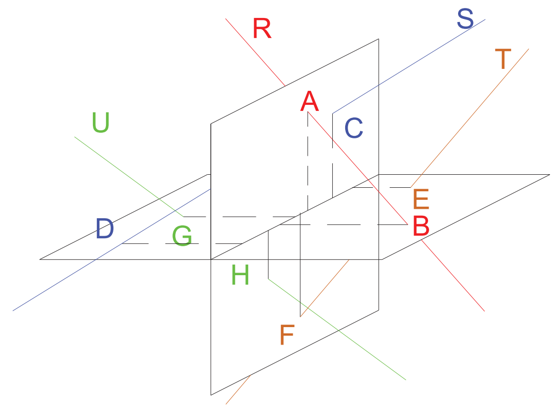


Fig. 21

La traza de una recta con el segundo bisector, se determina por la intersección de sus dos proyecciones.

Para hallar la traza de una recta con el primer bisector, se halla la simétrica de una de las proyecciones de la recta respecto de la línea de tierra y su intersección con la otra proyección nos determina una de las proyecciones de esta traza.

Las trazas horizontal y vertical de una recta se denominan **h–h'** y **v–v'.** (fig. 20)

PARTES VISIBLES Y OCULTAS DE UNA RECTA:

Habiendo visto que el observador se lo supone colocado en el primer cuadrante, sólo serán vistas las partes colocadas en él, siendo oculto o invisible todo lo situado en los otros cuadrantes. Asimismo es visto todo lo colocado en el horizontal anterior y vertical superior.

Es visto pues todo lo situado en el primer cuadrante; así lo vemos con las diferentes rectas situadas en el diedro, como lo muestra la fig. 22:

R: vistas ambas trazas
S y T: vista sólo una traza
L: todo oculto.

Los puntos que separan las partes vistas y ocultas de una recta, son precisamente sus trazas vistas. Por tanto, si las dos trazas de una recta son vistas, se ve el segmento determinado por ellas.

Si sólo tiene una traza vista, ésta divide a la recta en dos semirectas, de las cuales, será oculta la que contiene la traza oculta, y vista la otra.

Si las dos trazas de una recta son ocultas, no se ve ninguna parte de ella. (fig. 22)

Cualquier parte de la recta que sea vista, debe tener sus dos proyecciones de trazo contínuo y las dos proyecciones de la oculta, de trazo discontínuo, no admitiéndose por tanto, que una proyección sea vista, y la otra, oculta.

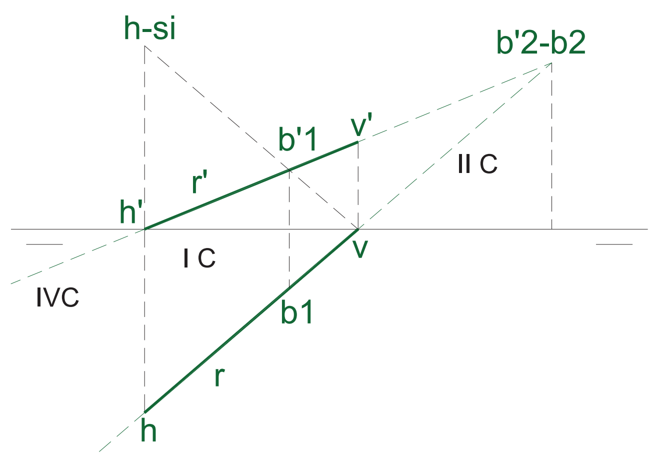


Fig. 22

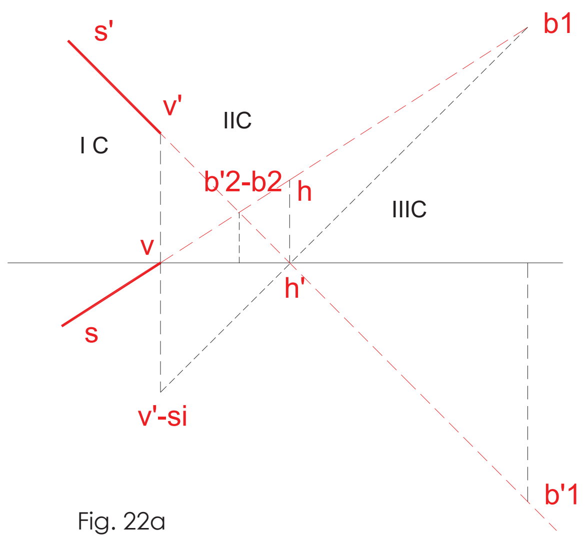


Fig. 22a

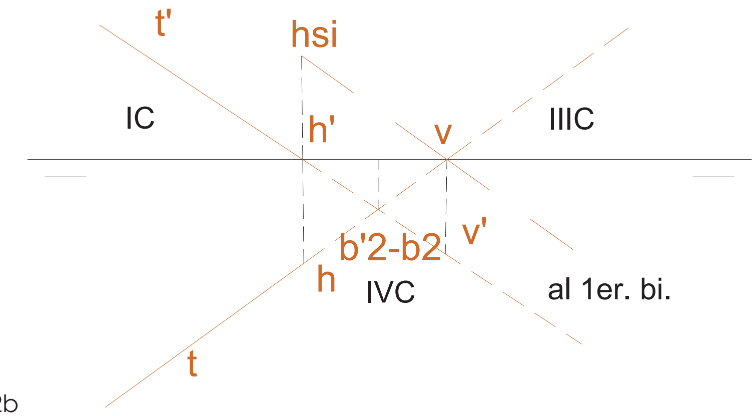


Fig. 22b

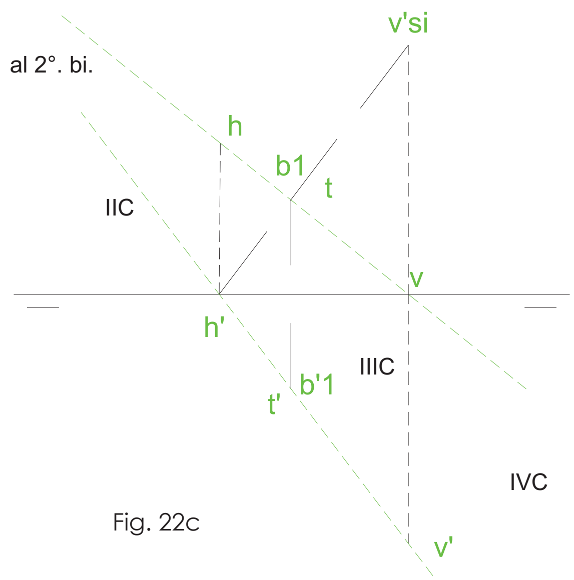


Fig. 22c

POSICIONES PARTICULARES DE LA RECTA:

1) **En el plano horizontal:** (fig. 23 y 24) Esta recta tiene su proyección horizontal confundida con ella misma, y su **proyección vertical**, sobre la línea de tierra. Como se ve en las figuras mencionadas, puede haber tres posiciones en este caso.

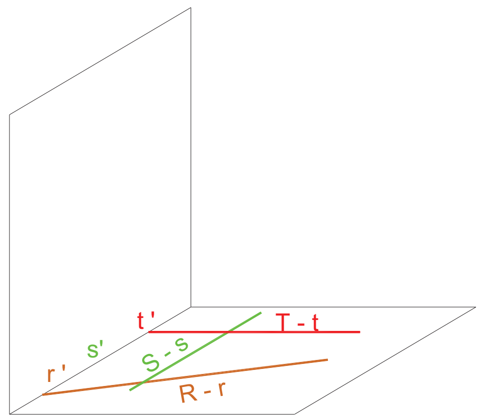


Fig. 23

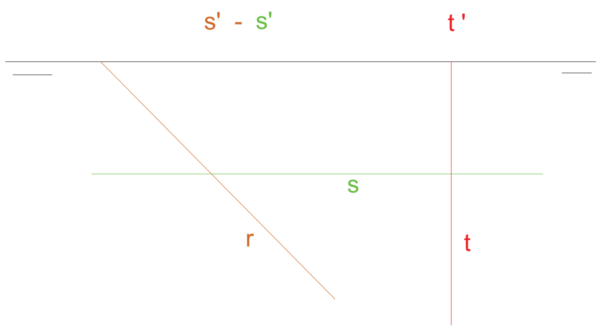


Fig. 24

2) **Recta horizontal o paralela al plano horizontal:** (fig. 25 y 26) Si la recta es horizontal, todos sus puntos tendrán la misma cota, luego, las proyecciones verticales equidistarán de la línea de tierra, o lo que es lo mismo: la proyección vertical **r'** deberá ser paralela a la línea de tierra, tomando la proyección horizontal cualquier dirección. Como en el caso anterior podremos ver tres casos: (fig. 25)

3) **Recta de punta o perpendicular al plano vertical:** (fig. 25) La recta **T,** de punta, se caracteriza por tener su proyección horizontal **t**, perpendicular a la línea de tierra, mientras que la proyección vertical **t'**, se reduce a un punto.

4) Recta paralela a la línea de tierra: **Se caracteriza esta recta, por tener sus dos proyecciones paralelas a la línea de tierra, como sucede con la recta** S **de las figuras 25 y 26.**

Todas las rectas situadas en el plano horizontal o paralelas a él, se caracterizan por proyectarse horizontalmente en verdadera magnitud.

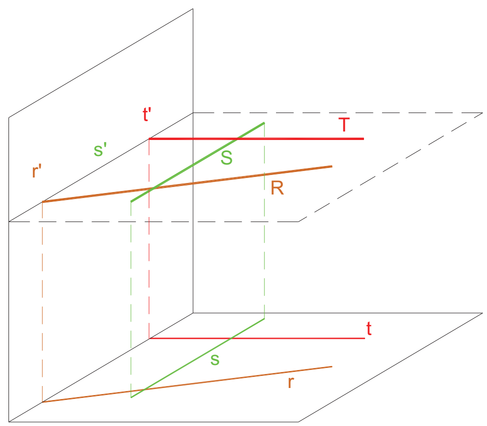


Fig. 25

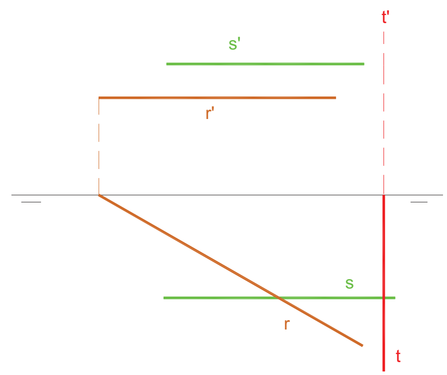


Fig. 26

5) **Recta situada en el plano vertical:** (fig. 27 y 28) Esta recta se caracteriza por tener **su proyección horizontal sobre la línea de tierra,** mientras que la proyección vertical puede tener cualquier dirección. Se pueden tener tres casos.

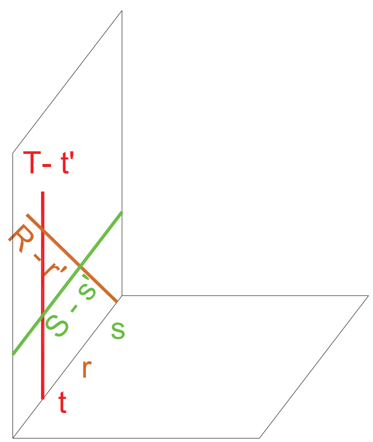


Fig. 27

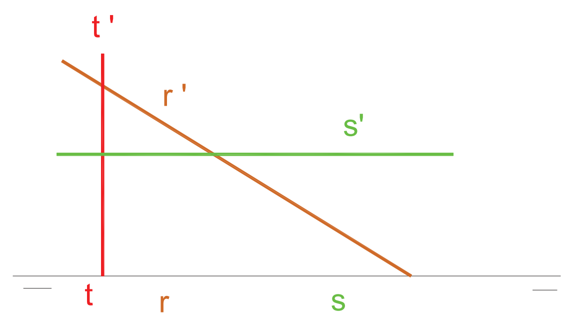


Fig. 28

Del mismo modo se deducen fácilmente las proyecciones de las rectas paralelas al plano vertical.

6) **Recta frontal o paralela al plano vertical** (fig.29 y 30) Su proyección horizontal **es paralela a la línea de tierra,** mientras que la vertical puede tomar **cualquier dirección.**

7) **Recta vertical o perpendicular al plano horizontal:** Es el caso de la recta **T** en las fig. 29 y 30; su proyección vertical **t' es perpendicular a la línea de tierra,** y la horizontal **t, se reduce a un punto.**

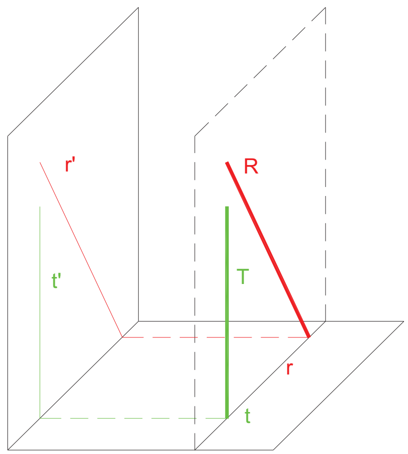


Fig. 29

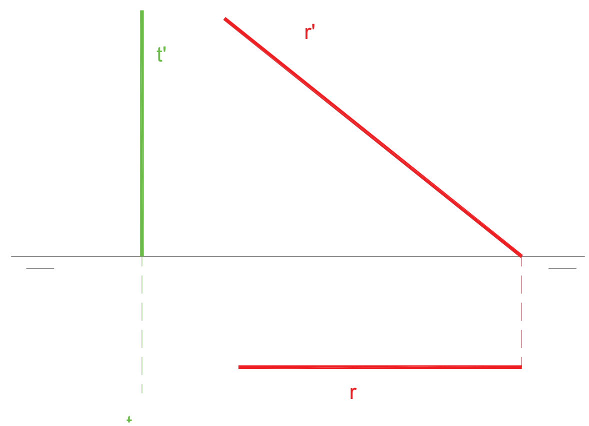


Fig. 30

Las rectas paralelas al plano vertical o las situadas en él, se proyectan verticalmente en verdadera magnitud.

8) **Recta de perfil:** (fig. 31 y 32) Se llama así a toda recta situada en un plano perpendicular a ambos planos de proyección (plano de perfil). Sus proyecciones están confundidas en una perpendicular a la línea de tierra.

Como todas las rectas del plano de perfil tienen las mismas proyecciones, éstas no sirven para determinr la recta. En este caso se representa la recta por dos puntos cualesquiera, **A** y **B** de ella, cuyas proyecciones deberán encontrarse por consiguiente, sobre la misma perpendicular a LT, como e ve en la figura 32.

Trazas de la recta de perfil.- Obsérvese espacialmente la figura 33. Sea la recta **AB,** cuyas trazas son **v’** y **h**, estando las correpondientes proyecciones **v** y **h’** en la línea de tierra. Abatiendo el plano de perfil que contiene a la recta (triángulo **v’vh**), haciéndolo girar como se hace con el plano vertical de proyección, en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta hacerlo coincidir con el plano vertical de proyección, se observa que sus trazas son **V** y **H**. Trazando desde **a’** y **b’** paralelas a la línea de tierra, ubicamos sus correpondientes situaciones finales en **A** y **B**

En el plano horizontal, desde **a** y **b**, se describen arcos con centro **h’v**, hasta encontrar la línea de tierra en **a1** y **b1**, desde donde se trazan perpendiculartes hasta llegar a **A** y **B** en la recta abatida sobre el plano vertical. (fig. 34)

Para considerar lo dicho, véase lo explicado en la figura 34. Sea la recta **AB** dada por sus proyecciones **ab–a’b’**. Opérese haciendo centro en **h’** y describiendo los círculos **a–a1, b–b1,** en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta ubicar en la línea de tierra los puntos **a1** y **b1**. Desde ambos se levanta perpendiculares a la línea de tierra y de **a’** y **b’**, paralelas a la misma, hasta encontrar en sus intersecciones, los puntos **A** y **B**. Unidos éstos, encontramos **h1** en la línea de tierra y **v’** (**V**) en la recta de perfil, siendo ésta la traza vertical. Para determinar la traza horizontal, desde **h1**, se gira en sentido contrario al anterior, esto es, según las manecillas del reloj, hasta encontrar en la recta el punto **h**, (**H**), que será la proyección horizontal de su traza horizontal.

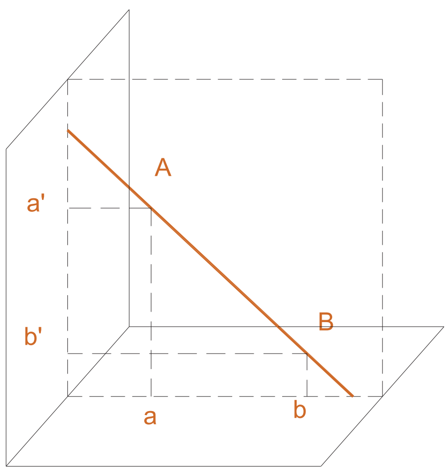


Fig. 31

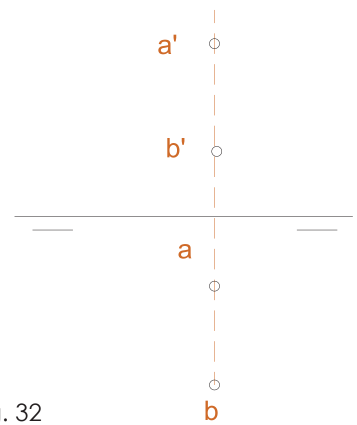


Fig. 32

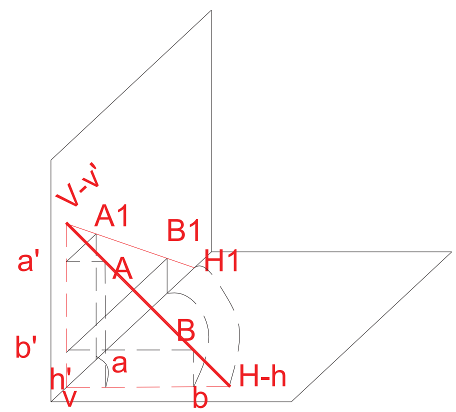


Fig. 33

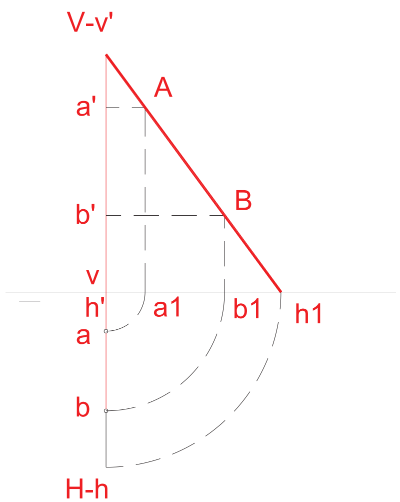


Fig. 34

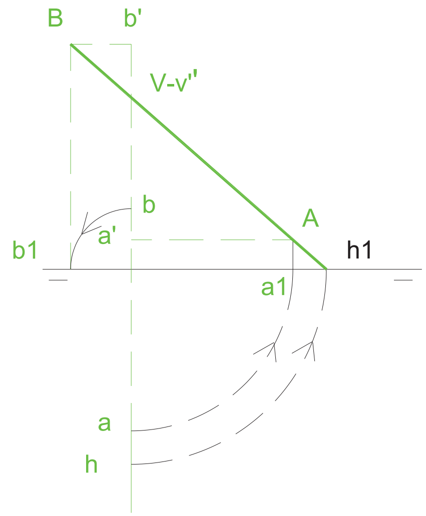


Fig. 35

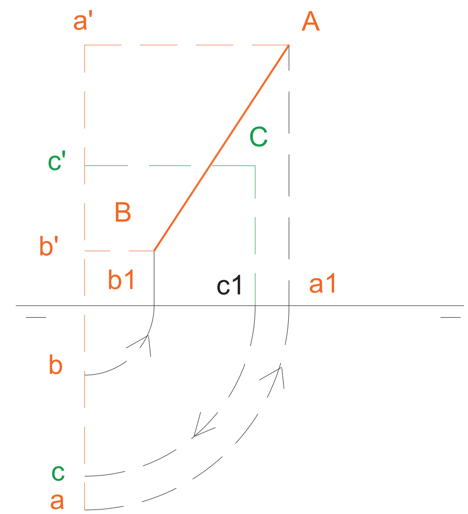


Fig. 36

Como ejemplo, determínese las trazas de una recta de perfil que tenga un punto en el primer diedro, y otro en el segundo. (fig. 35)

Para su resolución, obsérvese los puntos considerados en el ejercicio anterior, teniendo en cuenta que primero débese girar en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta encontrar **h**. **V** estará donde la recta **AB** corte en **v’** a las proyecciones de la recta de perfil.

Cómo determinar si un punto está en una recta de perfil: (fig. 36)

Al hablar de una recta común, se decía que un punto le pertenece, cuando sus proyecciones estaban sobre las respectivas de la recta, exceptuándose el caso de que la recta sea de perfil. En efecto, puede que las proyecciones de un punto, están sobre las proyecciones de ésta, y no pertenecerle; es lo que se ve en el gráfico de la figura 36.

Ejercicio: Tenemos una recta de perfil dada por sus proyecciones entre las que estarán las del punto **C**, el mismo que después de realizar los correspondientes abatimientos, vemos que no pertenece a la recta. (fig. 36)

A la inversa, conociendo las proyecciones de una recta, y la proyección de uno de sus puntos, se puede obtener la otra proyección. (fig.37)

Se procede como se sabe de acuerdo a los ejemplos anteriores: se abate de forma antihoraria los puntios **a** y **b**, obteniendo por paralelismo, en proyección vertical, **A** y **B** , los que unidos nos dan la recta. Se lleva a ella **c'**, obteniendo **C**, y por el desabatimiento se halla la proyección horizontal **c**.

9) **Recta que pasa por la línea de tierra:** (fig. 38) Tiene todas sus trazas confundidas en un mismo punto sobre la línea de tierra.

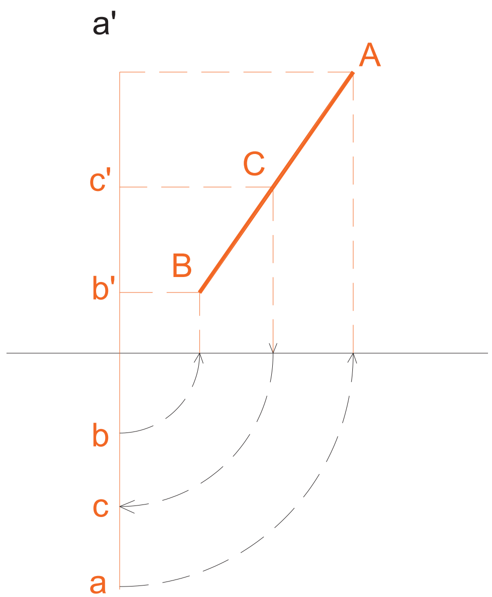


Fig. 37

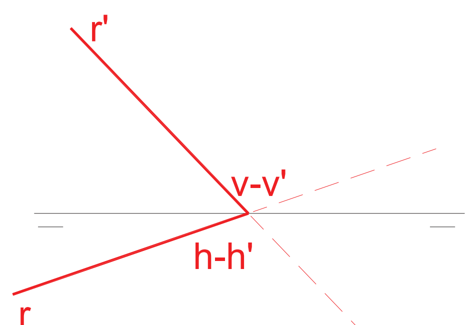


Fig. 38

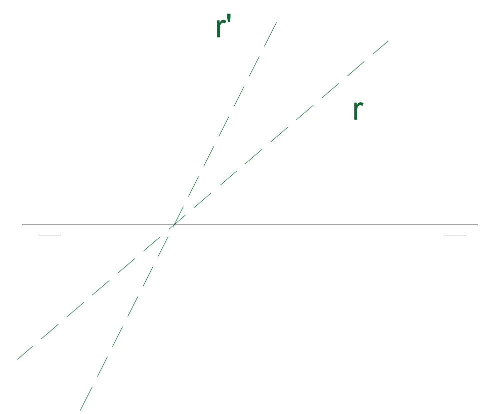


Fig. 39

Por tanto **las proyecciones r y r' de la recta serán concurrentes en un punto de la línea de tierra (fig. 39)**

10) **Recta situada en el primer bisector:** (fig. 40 y 41) Tiene sus puntos equidistantes de la línea de tierra; además por pasar por LT., sus proyecciones forman un mismo ángulo con ella. Si es paralela a LT, sus proyecciones le son paralelas y simétricas.

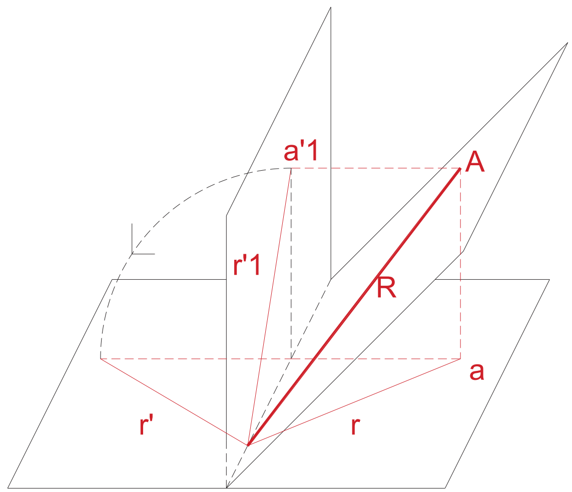


Fig. 40

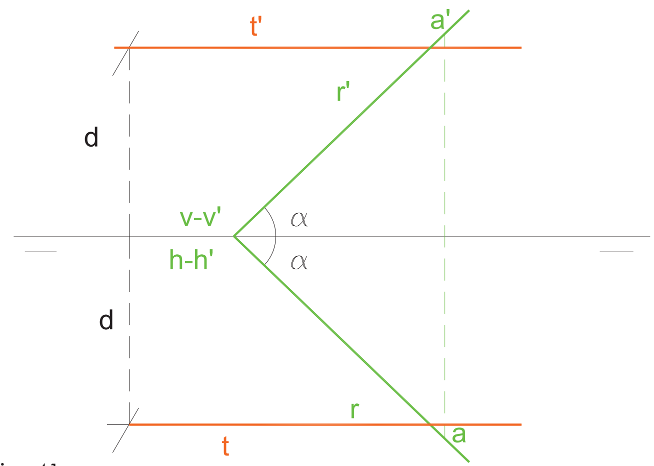


Fig. 41

11) **Recta situada en el segundo bisector:** (fig. 42) Todos sus puntos tienen las proyecciones confundidas; asimismo sus dos proyecciones se confundirán también en una sola recta, que podrá cortar a la LT, como la **r–r'**, o serle paralela, como la **t–t'**.

12) **Recta paralela al primer bisector:** (fig. 43) Para que una recta sea paralela al primer bisector, una de las proyecciones ha de ser paralela a la simétrica de la otra respecto de la línea de tierra. Se ve en la figura que **r'** es paralela a **r1**, simétrica de **r**, pudiendo comprobarse que también **r** es paralela a la simétrica de **r'**. Si observamos la figura, las dos proyecciones **r** y **r'** de la recta, forman el mismo ángulo **a** con LT, aunque esta condición sola no basta, ya que la recta **t – t'** tiene sus proyecciones formando el misma ángulo a con LT, y sin embargo, no es paralela al primer bisector, sino que lo es al segundo como veremos enseguida.

13) **Recta paralela al segundo bisector:** (fig. 44) Las rectas paralelas al segundo bisector, tienen sus proyecciones paralelas entre sí.

14) **Rectas que se cortan:** (fig. 45)

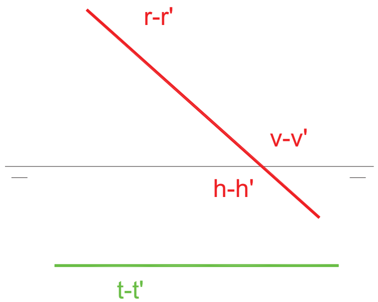


Fig. 42

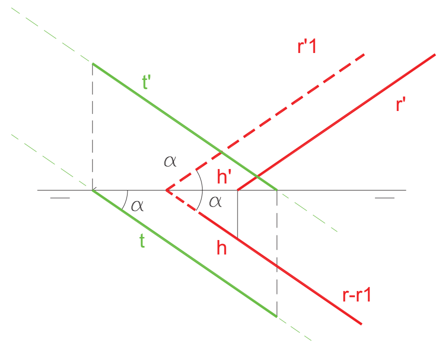


Fig. 43

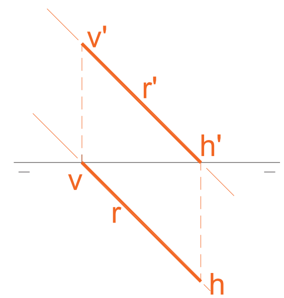


Fig. 44

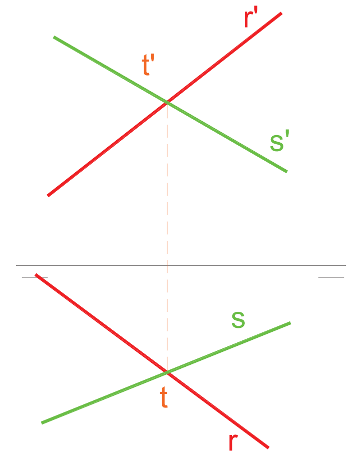


Fig. 45

Para que dos rectas se corten, la recta que une los puntos de intersección de las proyecciones homónimas de aquéllas, deben ser perpendiculares a la línea de tierra.

Se exceptúa el caso en que una de las rectas sea de perfil, como sucede con la **ab–a'b'** de la figura 46, pues el punto **y i – i'** de intersección de las proyecciones que cumple con las condiciones citadas, puede no ser el de intersección de ambas rectas.

Un caso particular de intersección es cuando el punto de intersección de ellas se encuentra en el infinito, es decir si las rectas son paralelas, como sucede en la figura 47. En este caso si la proyección **i** del punto de intersección debe encontrarse en el infinito, las proyecciones **r** y **s** deberán ser paralelas, sucediendo lo mismo con las proyecciones verticales. De ahí la regla:

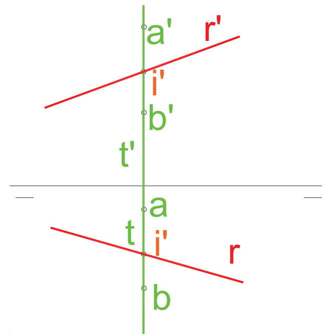


Fig. 46

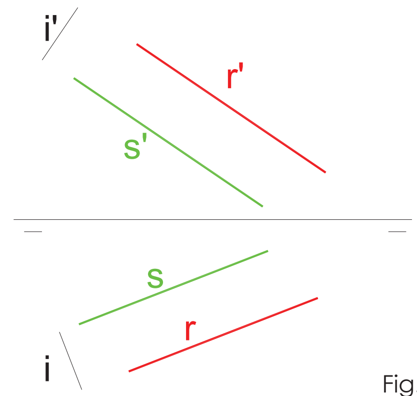


Fig. 47

Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones homónimas también lo serán.

Ejercicios:

1) Determinar en una recta todos los elementos que la componen, como ser, trazas, cuadrantes que cruza, partes visibles y ocultas, intersecciones (trazas) con los bisectores: figura 48

2) Idem al anterior, una recta que desde el primer cuadrante, se pierde en el segundo indefinidamente.

Solución: Al perderse indefinidamente en el segundo cuadrante, viniendo del primero, quiere decir que es paralela al horizontal (recta horizontal). Sólo tendría traza vertical, y las respectivas con los bisectores. Determinar sus proyecciones visibles e invisibles, señalando lo que pertenezca al primero y segundo cuadrante.

3) Recta como la anterior, pero pasando del cuarto cuadrante, al tercero.

4) Idem al anterior, pero del segundo cuadrante al tercero (recta frontal)

5) Idem, del primero al cuarto (recta frontal).

6) Determinar todos los elementos señalados en los anteriores ejercicios, en una recta que tenga traza vertical, en el vertical superior, y la horizontal, en el horizontal posterior.

7) Idem al 6, cuyas trazas horizontal y vertical, estén en elhorizontal anterior y vertical inferior, respectivamente.

8) Idem al 6, con traza vertical y horizontal, en el vertical inferior y horizontal posterior, respectivamente.

9) Idem al 6, con trazas horizontal y vertical en el horizontal anterior y vertical superior respectivamente.

10) Determinar la recta contenida en el primer bisector a la que es paralela, la recta del ejercicio 1 de este bloque.

11) Determinar la recta paralela al segundo bisector, que vaya del cuarto cuadrante, al segundo.

12) Trazar la recta determinada por dos puntos, uno en el vertical inferior, y otro en el tercer cuadrante. Señalar trazas, cuadrantes, partes visibles y ocultas, e intersección con los bisectores.

13) Similar al anterior, hallar todos los elementos requeridos, en la recta que tenga un punto en el primer cuadrante, y otro en el tercero.

14) Determinado un punto en el segundo bisector, trazar una recta que lo contenga, señalando todos sus elementos.

15) Teniendo una recta determinada por un punto en el horizontal anterior y otro en el vertical superior, ubicar un tercer punto que se encuentre en el primer cuadrante.

16) Trazar una recta vertical, con traza horizontal en el horizontal posterior.

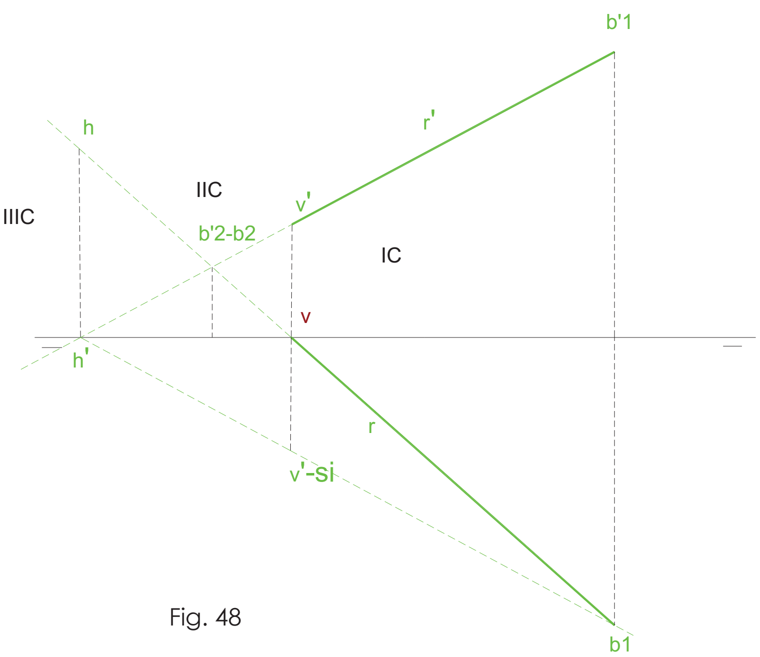


Fig. 48

17) Dibujar espacialmente, y en el depurado, una recta paralela a la línea de tierra, cuya proyección horizontal esta más cerca a ella, que al vertical. (fig. 49)

18) Representar una recta de perfil contenida en el primer bisector, señalando su punto en la línea de tierra.

19) Representar una recta de punta, señalando su traza con el primer bisector.

20) Dibujar una recta horizontal de cota 0.

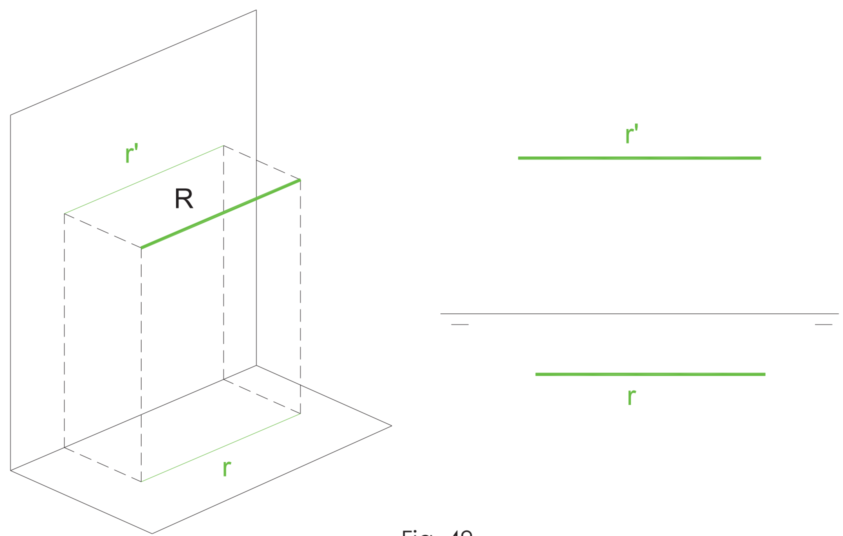


Fig. 49

21) En una recta que tenga su traza vertical, en el vertical superior, y la horizontal, en el horizontal anterior, señalar su punto que está en el segundo cuadrante y segundo bisector.

22) Dada una recta **AB**, de perfil, hallar sus trazas, su verdadera magnitud y los cuadrantes que cruza. (fig. 50)

23) Lo mismo que en el ejercicio de la figura 50, con la figura 51.

24) Dibujar una recta de perfil que tenga el punto **A**, en el segundo bisector, segundo cuadrante, y el **B**, en el vertical inferior.

25) Trazar una recta de perfil **AB**, que corte a la recta **CD**, (fig. 52).

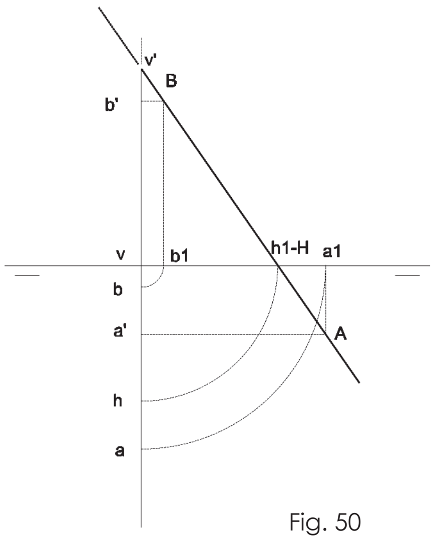


Fig. 50

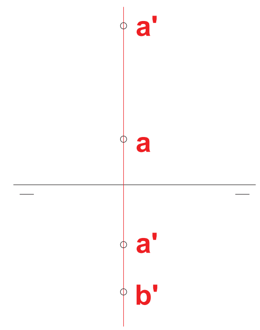


Fig. 51

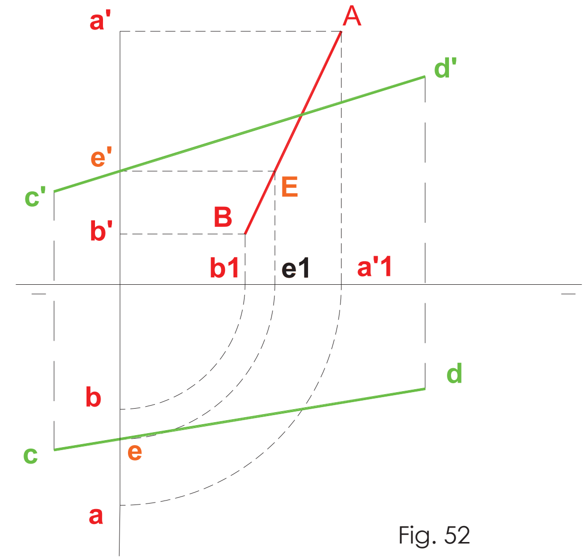


Fig. 52

REPRESENTACION DEL PLANO: Un plano queda determinado en geometría de las siguientes formas:

- Tres puntos no colineados
- Un punto y una recta
- Dos rectas paralelas
- Dos recta que se cortan

De todos estos casos, el más utilizado es precisamente el último, esto es por medio de la intersección de dos rectas.

En la representación del plano no se usan dos rectas cualesquiera, sino justamente sus intersecciones con los planos de proyección o **trazas**, con la nomenclatura de **traza horizontal** y **vertical** del plano.

En la figura 53, vemos que el plano corta a los planos horizontal y vertical de proyección según las rectas **M** y **N** respectivamente, que son las trazas con dichos planos. Ambas trazas concurren en un punto de la línea de tierra; de ahí la reg**la:**

La condición que deben reunir las trazas de un plano, es que sean concurrentes en un punto de la línea de tierra.

En la fig. 54, se dibujaron las proyecciones **m–m'** y **n–n'** de las trazas; ahora bien, teniendo en cuenta que la proyección **m'** de la traza horizontal y la **n** de la vertical están siempre sobre la línea de tierra, por tratarse de rectas situadas en los planos de proyección, por convenio, para simplificar, se prescinde de las proyecciones situadas sobre la línea de tierra, y se designa a las otras con una misma letra, afectando con una comilla **(')** la que se trate de la proyección vertical. En nuestro caso designaremos a los planos con las letras del alfabeto griego.

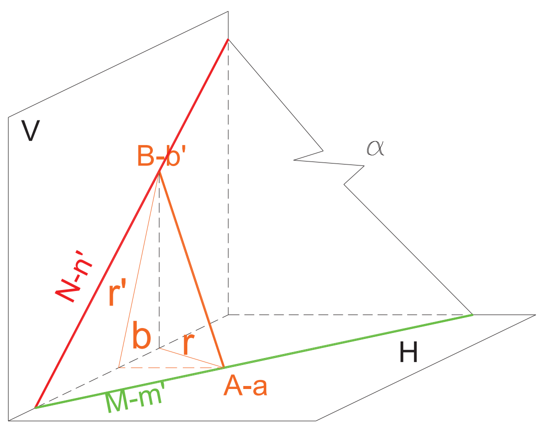


Fig. 53

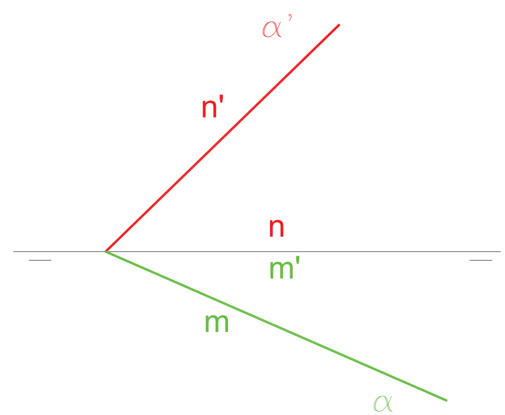


Fig. 54

Al mismo tiempo para no confundir la representación del plano con la representación de una línea que pasa por la línea de tierra, se hace, como recién se dijo, uso de las letras del alfabeto griego, afectando siempre con una comilla a la traza vertical. (fig. 53) No olvidemos sí que una proyección está siempre en la línea de tierra, de ahí que para representar un punto del plano, se hace como en el caso de los puntos **a–a'** y **b–b'**, de la figura 53.

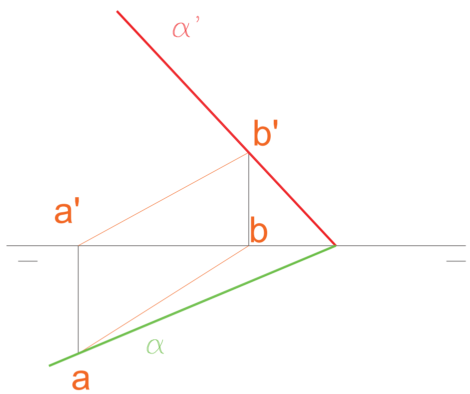


Fig. 55

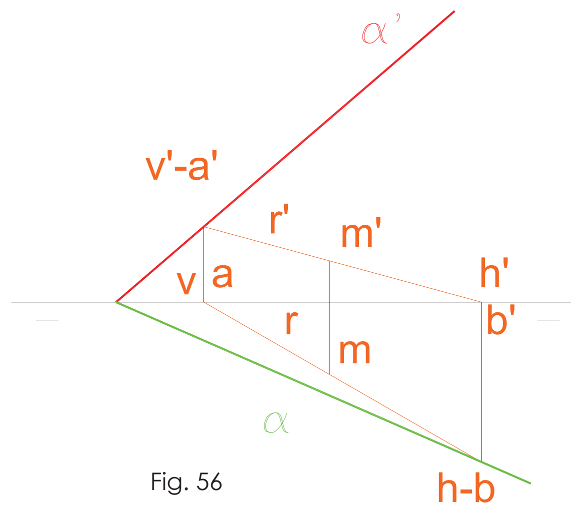


Fig. 56

Veremos a continuación, la aplicación a la determinación de las trazas de un plano, por las cuatro formas señaladas en la página 53.

Por tres puntos no colineados: De acuerdo a lo mostrado en la figura 57, tenemos el caso de tres puntos: **A**, en el primer cuadrante, **B,** en el segundo, y **C**, en el tercero. Para determinar el plano **a** que forman estos tres puntos, primero unimos dos de ellos, (**A** y **B**), determinando las trazas de la recta formada, en **h–h'** y **v–v'**. Seguidamente hacemos lo mismo con **A** y **C,** determinando otra recta, cuyas trazas serán **h1-h'1** y **v1-v'1**. La unión de las trazas homónimas, de las rectas, **h y h1** por un lado (α) y **v'–v'1** (α') por otro, con lo que queda determinado el plano buscado.

Pasos a seguir en este procedimiento:

- La unión de los puntos A y B, nos da la recta AB cuyas trazas son h y v'.
- La unión de los puntos A y C, nos da la recta AC cuyas trazas son h1 y v'1.
- Uniendo trazas homónimas de las rectas tenemos las trazas respectivas del plano, esto es: v' y v'1 da α**', y** h y h1 da α

Por una recta, y un punto exterior a ella: El presente caso lo encontramos desarrollado en el ejercicio de la figura 58, en donde tenemos la recta **R**, (**r–r'**) cuyas trazas son justamente **v–v'** y **h–h'**. Desde un punto exterior a ella, el **b–b'**, unimos con otro de la recta **R**, determinando otra cuyas trazas son **v1–v'1** y **h1–h'1**; la unión de las trazas homónimas de las rectas, nos dará la determinación de las trazas del plano β.

Por dos rectas paralelas: En la figura 59, tenemos el caso de dos rectas paralelas entre sí, la **R** y la **S**, cuyas proyecciones homónimas también lo serán, esto es la **r** con la **r'** y la **s** con la **s'**. Las trazas de la recta **R** son **v'** y **h**, y las de la **S**, las **v'1** y **h1**. Como en los casos anteriores, las trazas del plano resultante, se obtienen con la unión de las trazas homónimas de las rectas; es decir, **v'** y **v'1** determinan α', y **h** y **h1**, α.

Por dos rectas que se cortan: Es el caso presentado en la figura 60, en donde tenemos dos rectas, **R** y **S**, (**r–r'** y **s–s'**), las mismas que se cortan en el punto **A**, (**a–a'**). Como en los tres casos anteriores, el problema se reduce a encontrar las respectivas trazas de de las rectas: **v** y **h**, de **R**, y **v'1** y **h1**, de **S**, y en la posterior unión de sus trazas homónimas. β' será la unión de **v'** y **v'1**, y β, de **h** y **h1**.

Cómo reconocer si una recta está situada en el plano: En la figura 53, se ve que la recta **R** pertenece al plano y por pertenecerle, corta al plano vertical en **B** y al horizontal en **A**, trazas ambas de la recta.

Por tanto, para que una recta esté contenida en un plano, es preciso que sus trazas estén en las homónimas del plano.

En la figura 56, **r–r'** pertenece al plano porque sus trazas están en las homónimas del plano. Para trazarla basta ubicar dos puntos **A** y **B** del plano y por allí determinar las trazas de las rectas. Si se quiere ubicar un punto del plano, hay que hacerlo por medio de una recta, como el **m–m'**, de la misma figura.

Un plano no puede contener sino determinadas rectas. Por ejemplo, un plano horizontal, no puede contener una recta vertical (**R**) como en la figura 61, pues esta recta cortará al mencionado plano, pero sí contendrá a una recta de punta (**S**).

El mismo concepto puede aplicarse al caso de un plano frontal, al que una recta de punta (**T**) lo cortará y que además podría contener a otra que sea verticval (**U**).

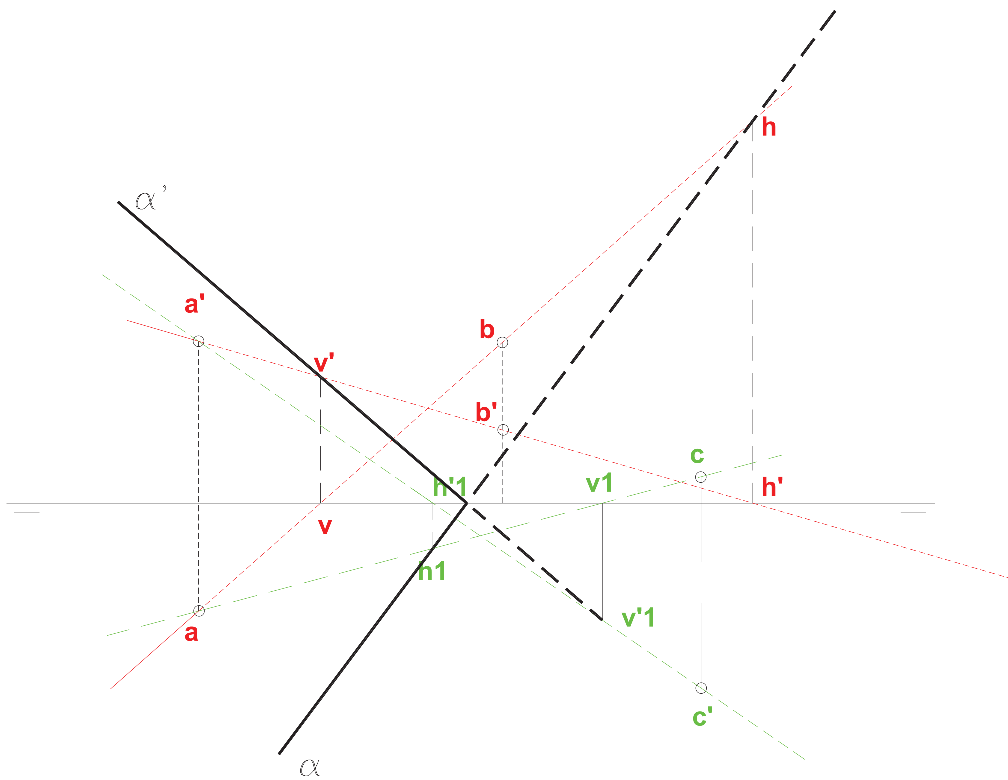


Fig. 57

Como regla general se puede decir que un plano cualquiera puede contener a las cuatro rectas consideradas, esto es: oblícua, horizontal, frontal y de perfil, cosa que no puede ocurrir con los otros, que sólo contendrán tres o menos.

Por ejemplo, un plano horizontal, sólo puede contener rectas horizontales y de punta; uno que sea paralelo a la línea de tierra, contendrá a una oblícua y a otra de perfil; un proyectante, contendrá a una oblícua, una de punta y otra horizontal o frontal, según que el proyectante sea horizontal o vertical, etc. (fig. 61)

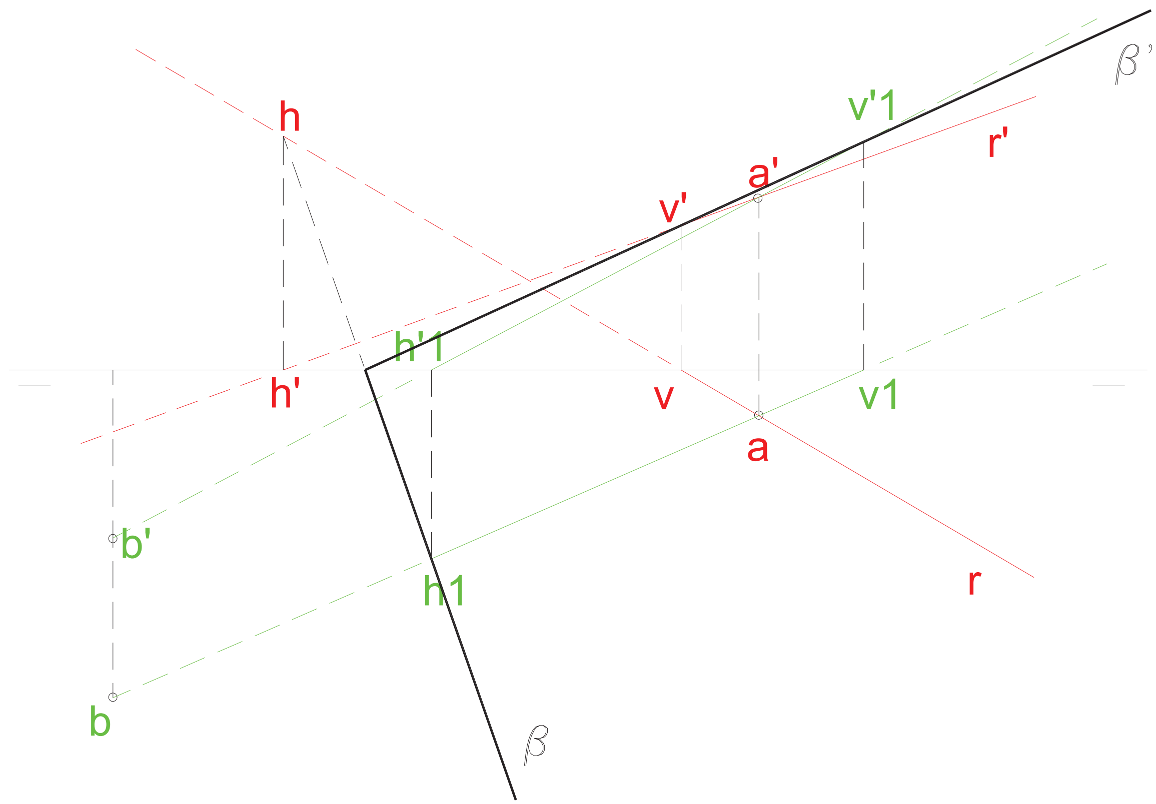


Fig. 58

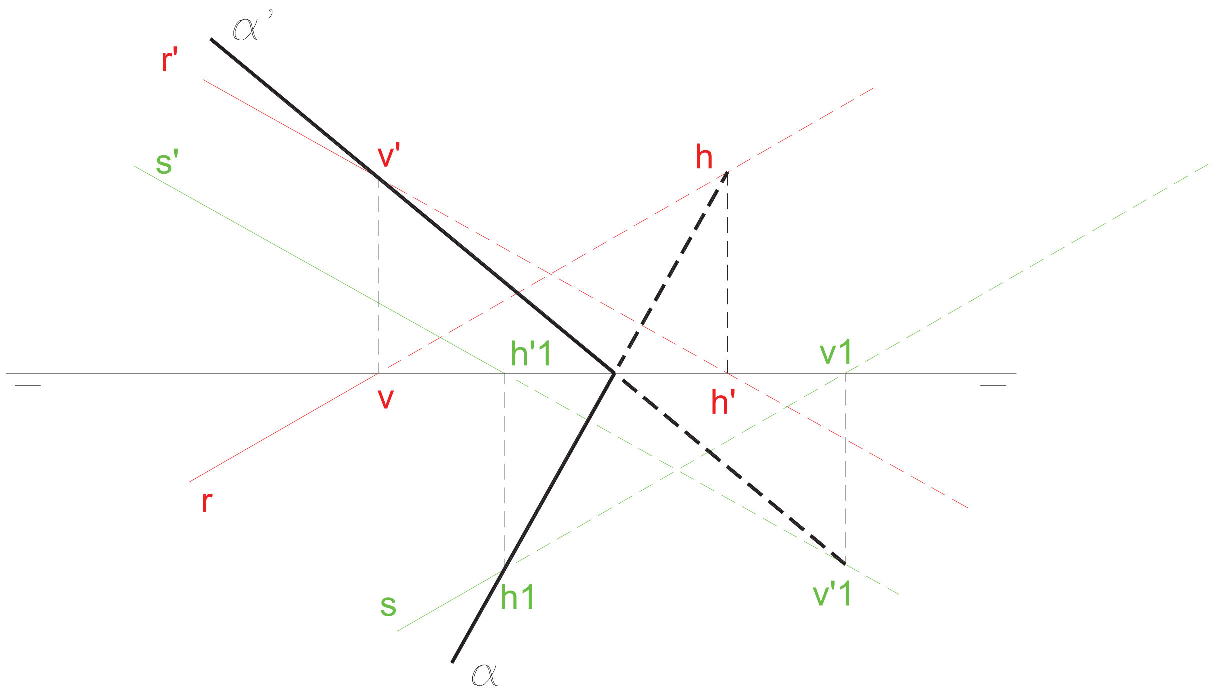


Fig. 59

Horizontales y frontales el plano: La recta horizontal **R** del plano, es una recta que cumple con dos condiciones: ser horizontal y pertencer al plano. (fig. 62)

Por la primera condición tiene su proyección vertical **r'** paralela a la línea de tierra, y su proyección horizontal, paralela a la traza horizontal del plano; como la recta horizontal no tiene traza horizontal, la proyección horizontal de la recta se cortará con la traza horizontal del plano en el infinito.

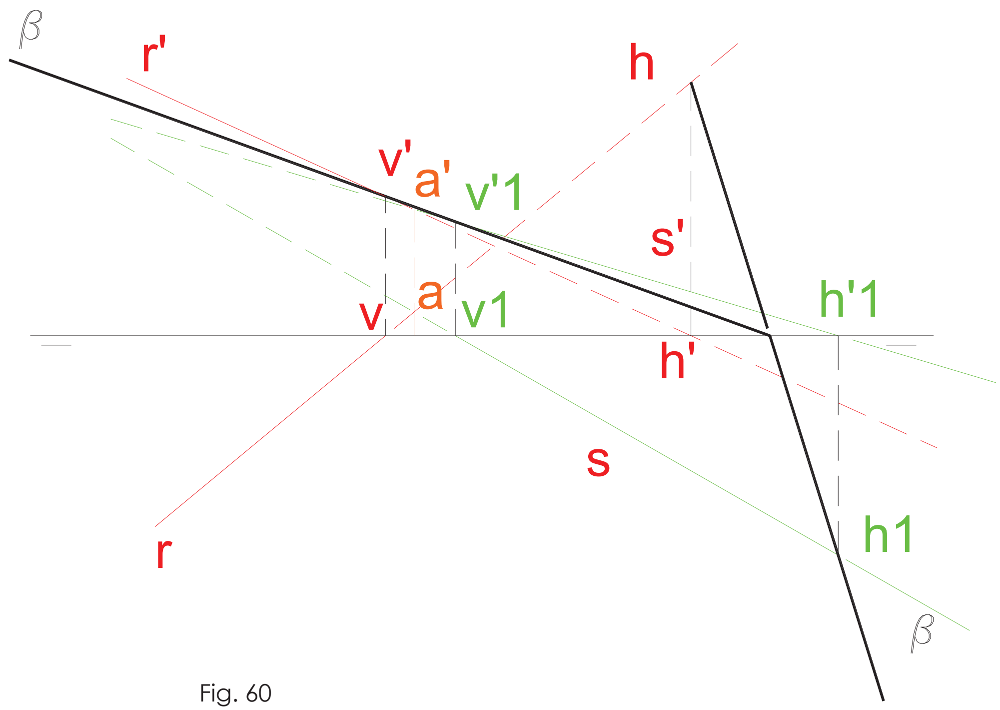


Fig. 60

De ahí que se dice que la proyección horizontal de esta recta debe ser paralela a la traza horizontal del plano. Por eso la regla:

Toda horizontal de un plano tiene su proyección horizontal paralela a la traza homónima del mismo nombre del plano, y su proyección vertical, paralela a la línea de tierra. (fig. 63)

Se puede también considerar la recta horizontal como la intersección de α' dado (fig. 62), con planos horizontales de cotas diferentes, como el **H'**.

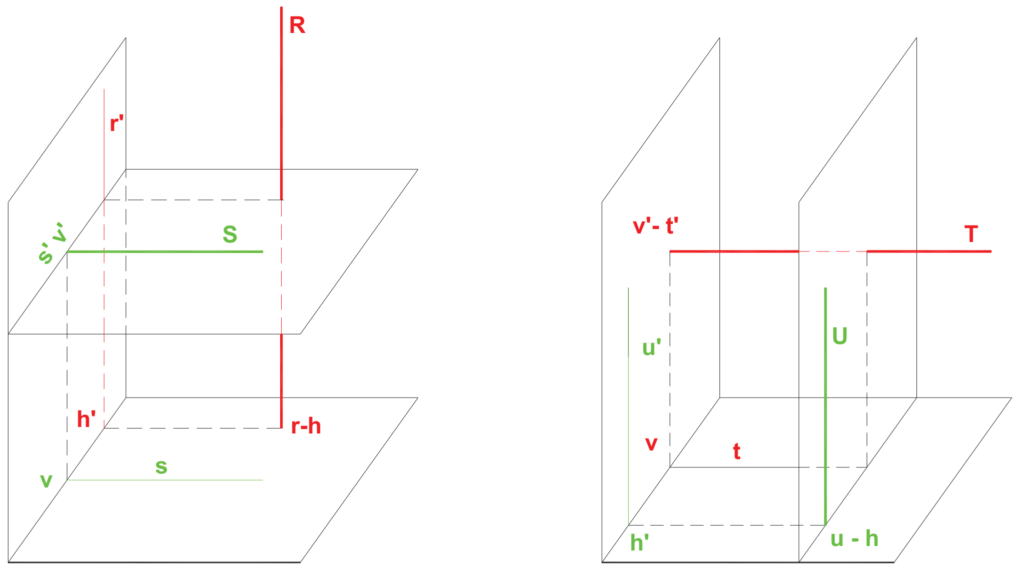


Fig. 61

Similar razonamiento se puede tener en cuenta para el reconocimiento de las rectas frontales del plano, figura 64. Esta cumple con la doble condición de estar situada en el plano α y ser paralela al plano vertical. De la misma manera que en el caso de las horizontales del plano, podemos decir:

Las frontales del plano, tienen su proyección vertical paralela a la traza del mismo nombre del plano, y la horizontal, paralela a la línea de tierra .(fig. 64)

Rectas de máxima pendiente y de máxima inclinación del plano: La recta de máxima pendiente de un plano es aquella que perteneciéndole, es perpendicular a su traza horizontal; de ahí que su proyección horizontal es perpendicular a la traza horizontal del plano. (fig. 66)

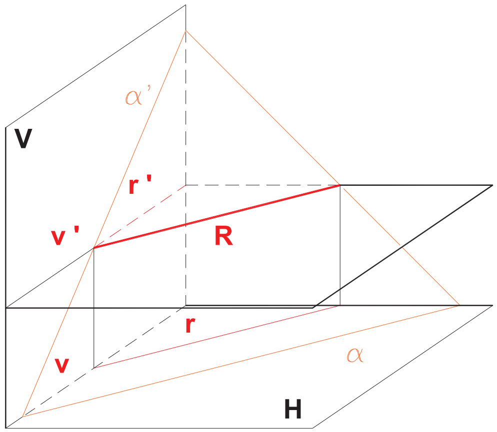


Fig. 62

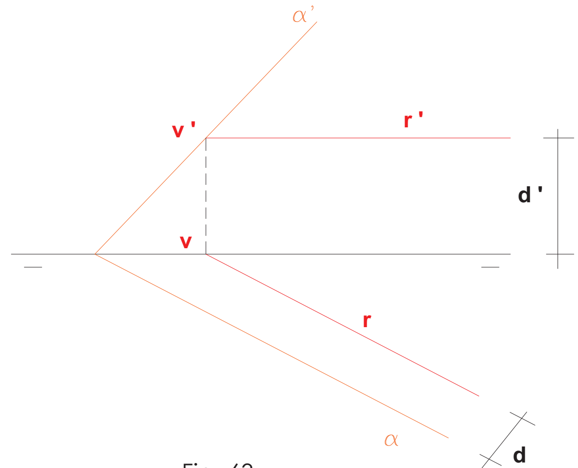


Fig. 63

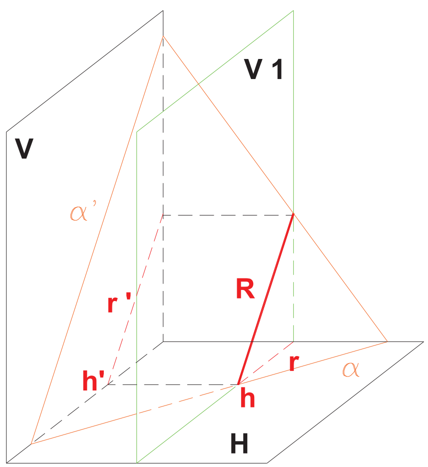


Fig. 64

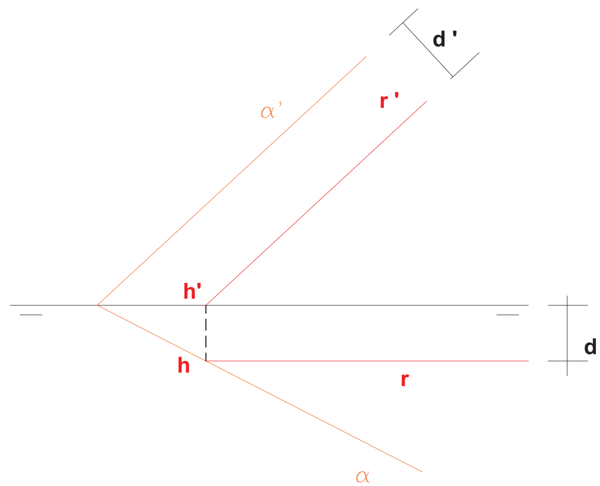


Fig. 65

La recta de máxima inclinación es la que perteneciendo al plano, es a su vez perpendicular a su traza vertical. (fig. 67)

Estas dos rectas que se acaban de ver, definen por sí solas el plano al que pertenecen. En efecto, una recta que es de máxima pendiente de un plano, debe tener la proyección horizontal, perpendicular a su traza horizontal; por tal motivo, por la traza horizontal de la recta, **h**, se trazará α, perpendicular a dicha proyección. Como la recta debe pertenecer al plano, donde α corte a la línea de tierra, se deberá unir con **v'** o traza vertical de la recta, (fig. 66), quedando de esta manera determinadas ambas cosas, pues las dos trazas de la recta, estarán en las respectivas del plano.

Con el mismo criterio se procederá con la recta de máxima inclinación; esto es, por la traza vertical **v'** de la recta, (fig. 67), se trazará una perpendicular a su proyección vertical**,** α' y donde ésta corte a la línea de tierra, se unirá con **h**, traza horizontal de la recta.

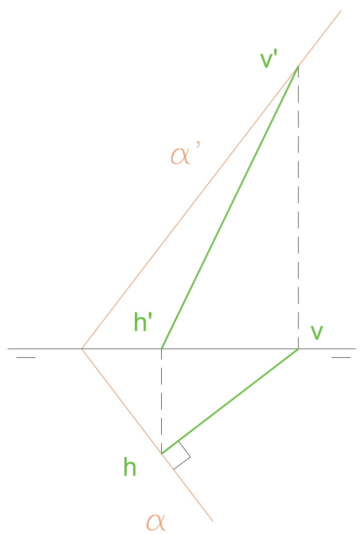


Fig. 66

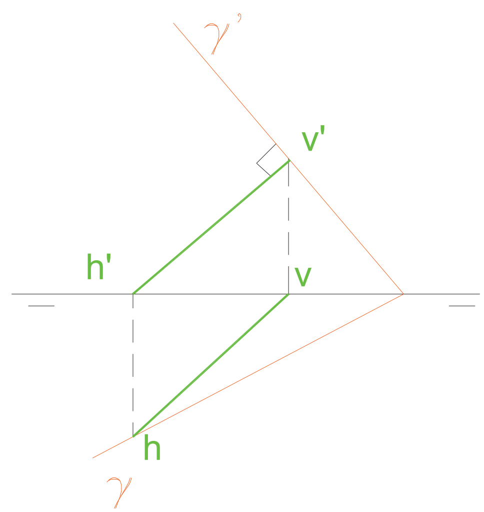


Fig. 67

Posiciones particulares del plano:

1) **Plano vertical o perpendicular al plano horizontal:** Se caracteriza por tener su traza vertical α' perpendicular a la línea de tierra. (fig. 68). Este plano es además proyectante horizontal, por consiguiente:

Todos los puntos situados en él, se proyectan horizontalmente sobre su traza horizontal α, como se comprueba en el punto a – a'; lo mismo ocurre con la recta r – r' (fig. 69)

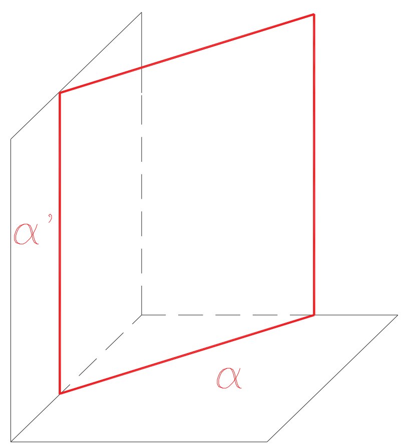


Fig. 68

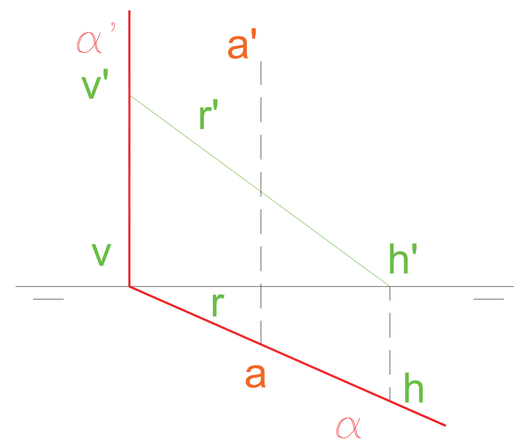


Fig. 69

2) **Plano de canto o perpendicular al plano vertical:** Tiene su traza horizontal **a** perpendicular a la línea de tierra, siendo ésta la condición que lo caracteriza. (fig. 70) Es también proyectante vertical, lo que indica que **los puntos situados en él se proyectan verticalmente sobre su traza vertical.** (fig. 71)

3) **Plano de perfil o perpendicular a la línea de tierra:** Cumple las condiciones de los casos anteriores; por ello,ambas trazas se representarán perpendiculares a la línea de tierra y además confundidas. (fig. 72 y 73)

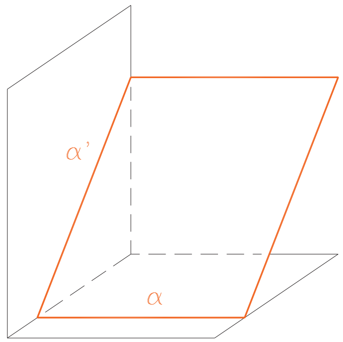


Fig. 70

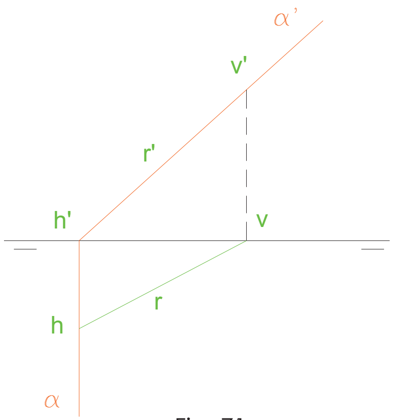


Fig. 71

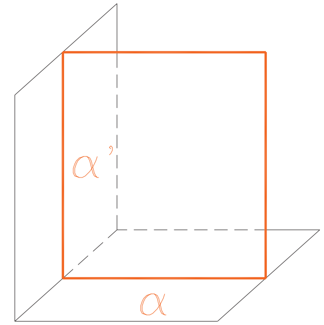


Fig. 72

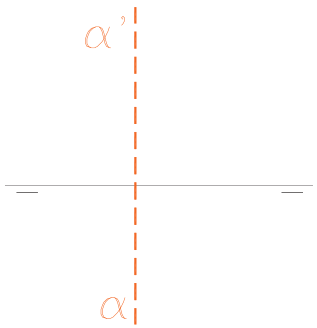


Fig. 73

4) **Plano horizontal o paralelo al horizontal de proyección:** Su traza vertical α' es paralela a la línea de tierra, y su horizontal es impropia, o lo que es lo mismo, no tiene. Es proyectante vertical y goza de las cualidades de tal (fig. 74 y 75).

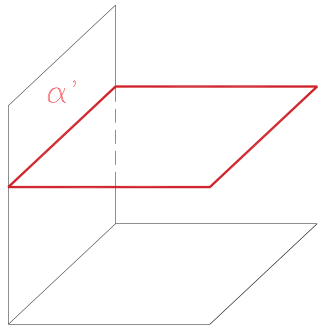


Fig. 74

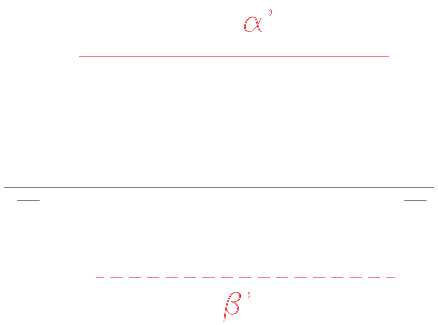


Fig. 75

5) **Plano frontal o paralelo al vertical:** Análogamente al anterior, no tiene traza vertical, siendo la horizontal, paralela a la línea de tierra, pudiendo encontrarse debajo de ella si está delante, y encima, si detrás. (fig. 77 y 78)

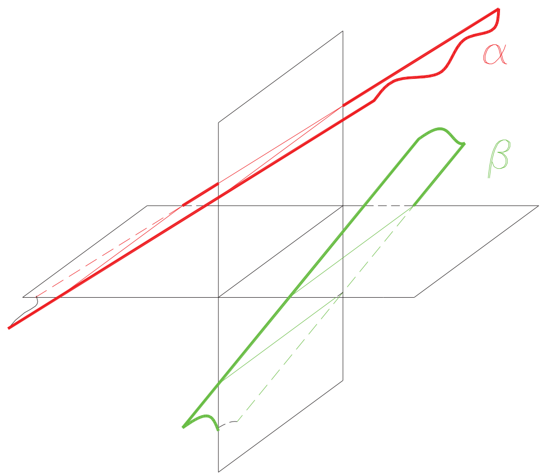
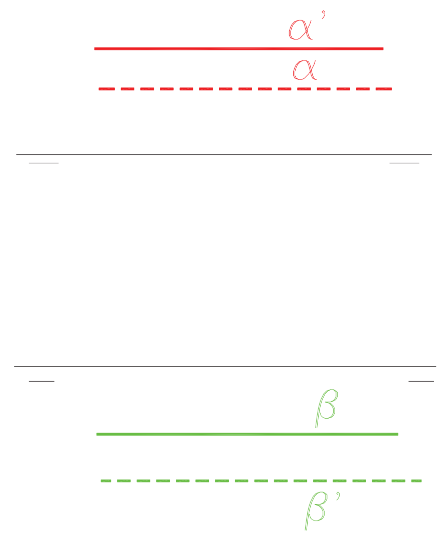


Fig. 76



6) **Plano paralelo a la línea de tierra:** Al hablar de la recta, se dio a entender que no hay ninguna que sea perpendicular a la vez, a los dos planos de proyección, pero sí a su intersección (LT), que es el caso de la recta de perfil.

Respecto al plano, se puede decir que no lo hay que sea paralelo, a la vez, a los dos planos de proyección, pero sí a su intersección (LT). Este es el caso del llamado plano paralelo a la línea de tierra.

En este caso las trazas del plano no cortarán a la línea de tierra. **Las dos trazas α' y a del plano, son por tanto paralelas a la línea de tierra.** Todas las rectas horizontales y frontales de este plano resultan paralelas a la línea de tierra. (fig. 79 y 80)

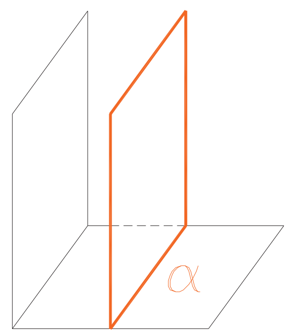


Fig. 77

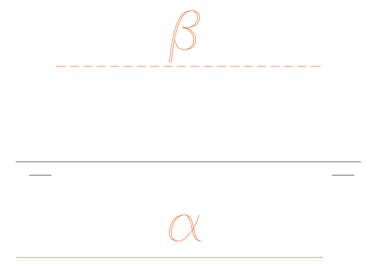


Fig. 78

En posición normal, este plano se lo ve como en las figuras 79 y 80 (traza vertical arriba de la línea de tierra, y horizontal, debajo.) Si el plano en cuestión, cortase al diedro, del Iº al IIIer. cuadrante, pasando por el IIdo., ambas trazas aparecerán encima de la línea de tierra, siendo visible la vertical, e invisible la horizontal. Si por el contrario lo hiciera del Iº al IIIº, pasando por el IVº, aparecerán ambas por debajo de dicha línea, siendo visible la traza horizontal, e invisible la vertical. (fig. 77)

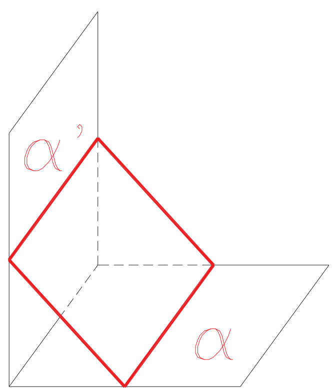


Fig. 79

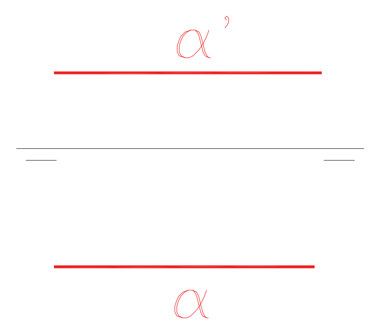


Fig. 80

7) **Plano que pasa por la línea de tierra:** Este es el único caso en que el plano no queda determinado, por tener sus trazas confundidas con la línea de tierra. Se necesita pues otro dato para determinarlo, para lo cual se utiliza un punto del plano como el **a – a’** (fig. 82), mostrándose en el mismo gráfico la forma de representar este tipo de plano. (fig. 82 y 83)

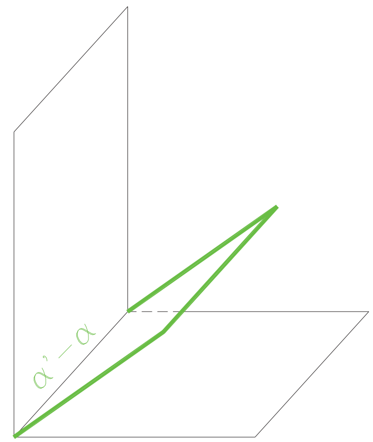


Fig. 81

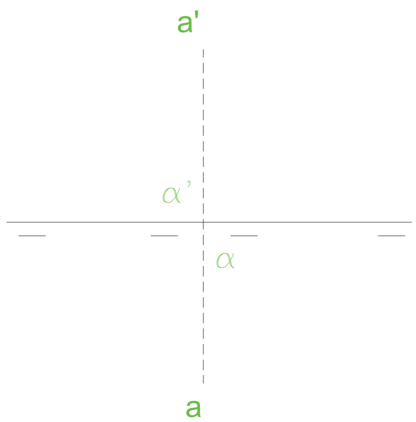


Fig. 82

8) **Plano perpendicular a los bisectores**: Para una mejor comprensión del presente caso, examinar atentamente la fig. 84: El plano **t** es de perfil y corta al primer bisector según la recta **OM**. Trazando en este plano una recta cualquiera D**B** perpendicular a **OM**, dicha recta será también perpendicular al bisector primero. Como **DON = NOB = 45º**, en el triángulo **DOB** se verificará **D = B = 45º**. Al abatir el plano vertical, el punto **D**, caerá sobre **A**, verificándose que **AO** es igual a **OB**. Cualquier plano como el **BCD** que pase por **BD**, será perpendicular al primer bisector, por serlo **BD**; Luego al abatir el plano vertical, su traza vertical **CD** caerá sobre **CA** simétrica de **CB** por ser **A** y **B** simétricos.

De ahí que: **Todo plano perpendicular al primer bisector, tiene sus trazas simétricas respecto de la LT**, como sucede con el **a** en el que se ve que ambas trazas forman el mismo ángulo con LT (fig. 85).

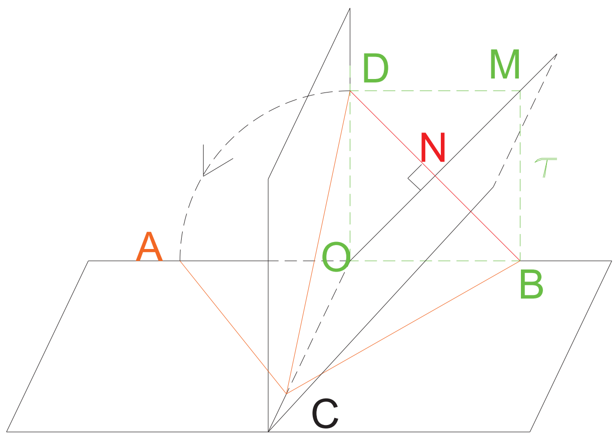


Fig. 83

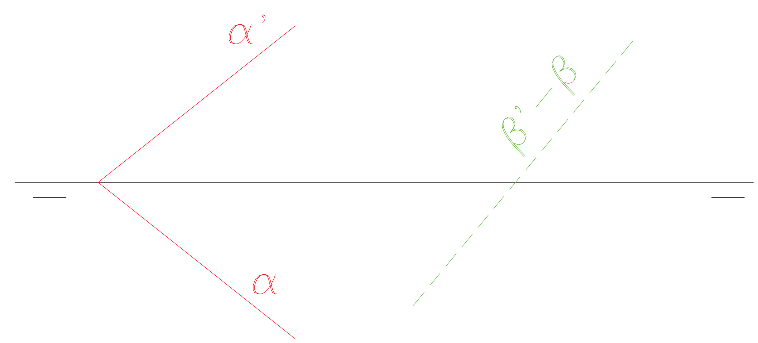


Fig. 84

Repitiendo el mismo razonamiento para el plano **ADC** perpendicular al segundo bisector, se demostrará que **OA = OD**, y al abatir, su traza vertical **CD,** coincidirá con la horizontal **AC**. Con lo que se prueba que: **el plano perpendicular al segundo bisector, tiene sus trazas confundidas.**

Así ocurre con el plano β (fig. 84)

En caso de que el plano fuera perpendicular a los bisectores, y paralelo a la línea de tierra, sus trazas serán paralelas a LT y equidistantes de ella, si es perpendicular al primer bisector, o confundidas, si lo es al segundo. (fig. 85)

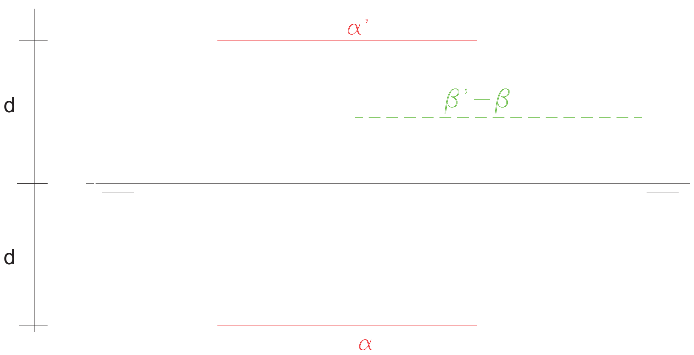


Fig. 85

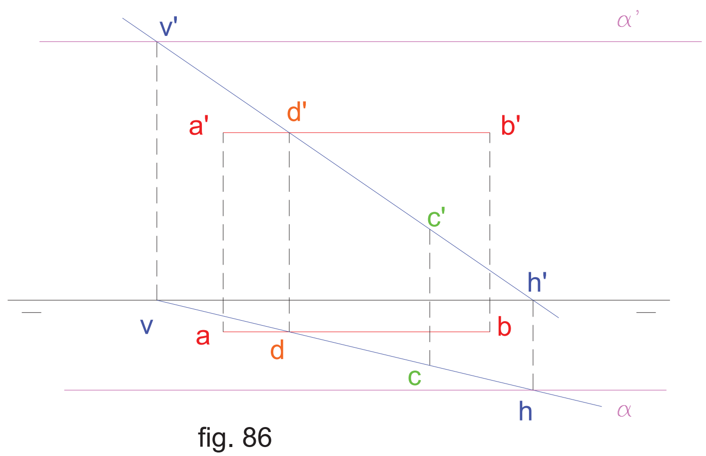


Fig. 86

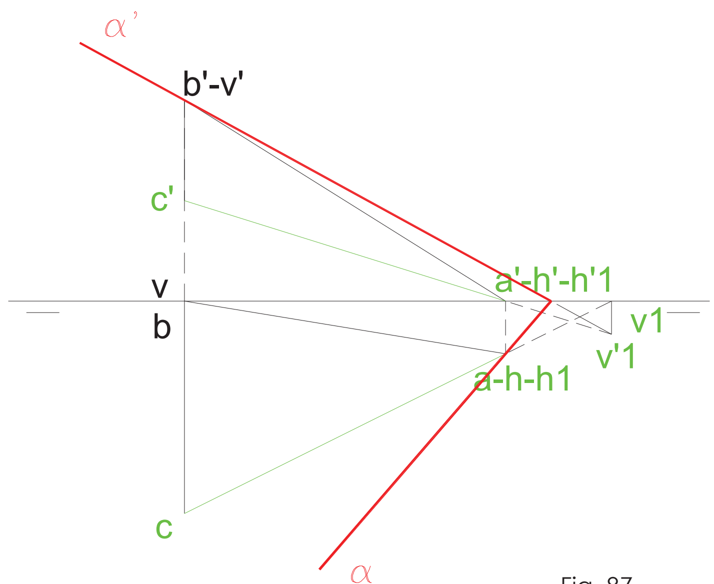


Fig. 87

EJERCICIOS:

1.- Determinar las trazas de un plano del cual se conocen una recta paralela a la línea de tierra, y el punto **C** (fig. 87)

Solución:

Nos damos un punto **D**, en la recta **AB**, el que unido a **C**, determina la recta **CD**, con lo que al cortarse en **D**, con la recta **AB**, nos determinará el plano buscado. De ahí, por las trazas de **CD**, pasaremos α'**-** α**,** ambas paralelas a la línea de tierra, pues al ser **AB**, paralela a ella, forzozamente el plano que la contenga, debe serle paralelo.

2.- Determinar las trazas de un plano definido por una recta **AB**, que es de máxima pendiente del plano, siendo el punto **B**, perteneciente al primer bisector.

3.- Determinar las trazas de un plano por la recta **AB** que pasa por la línea de tierra, y otra similar cuyas proyecciones sean inversas a la anterior (las horizontales de **AB**, son las verticales de **CD**, y viceversa)

Solución:

Como ambas rectas pasan por la línea de tierra, también el plano será uno que pase por ella. Por tanto, para determinarlo, nos damos un punto auxiliar **E**, que unido, por ejemplo con **B**, (recta **BE**), nos determinará, por sus trazas, y las de la otra, el plano buscado. (fig. 88)

4.- Trazar una recta de máxima pendiente del plano determinado por las rectas **AB** y **BC**, sin necesidad de hallar las trazas del mismo (fig. 89)

Solución:

Por **C**, o **A**, nos damos una recta horizontal auxiliar, que puede ser por ejemplo la **CD**. Como la recta de máxima pendiente de un plano tiene su proyección horizontal perpendicular a la traza horizontal del mismo, será también perpendicular a todas las proyecciones horizontales, de las rectas horizontales del plano; por tanto, desde **b** (proyección horizontal de **B**), trazamos una perpendicular a **cd**, hallando **e–e'**, que con **b–b'**, nos da la recta pedida.

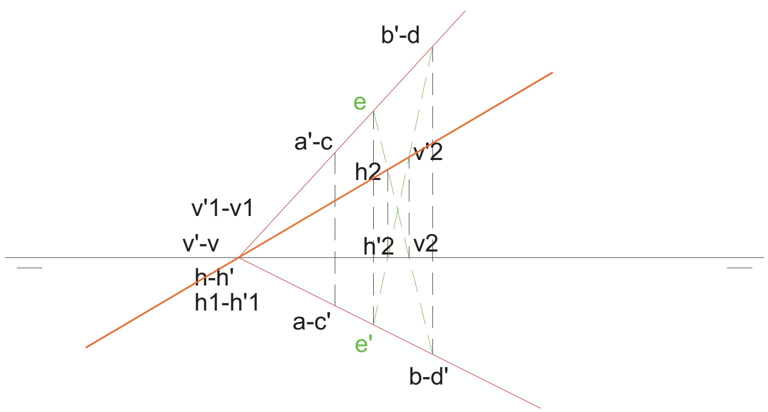


Fig. 88

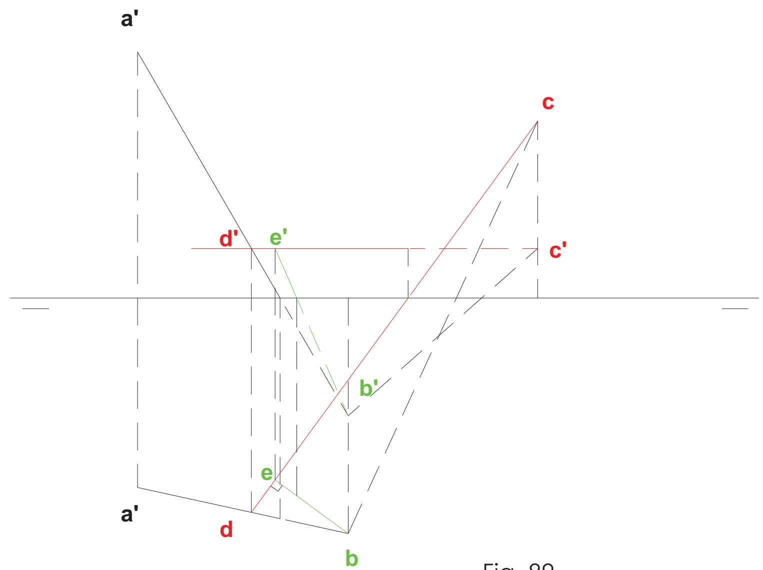


Fig. 89

5.- Señalar una recta de perfil que pertenezca a un plano como el señalado en la figura 90.

Solución:

Trazar dos rectas horizontales, **R** y **S**, del plano. Sobre una misma perpendicular a la línea de tierra, se marcan los puntos **A** y **B**, que serán los de su intersección con **R** y **S**, y a su vez una recta de perfil del plano. Para verificar esta aseveración, por medio del abatimiento conocido, ubicamos los puntos **a'1** y **b'1**, que unidos entre sí nos permitirán verificar que sus trazas están sobre α' y α respectivamente.

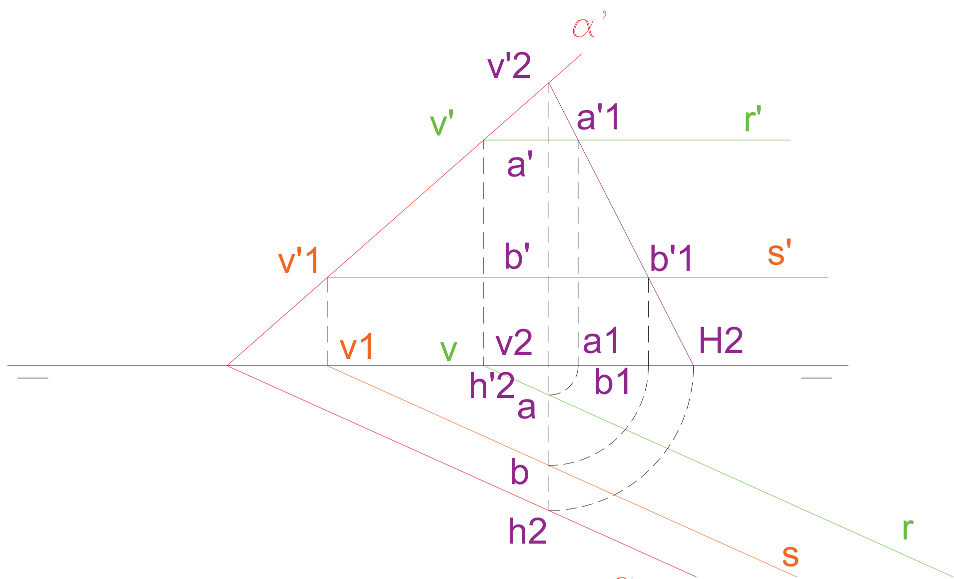


Fig. 90

6.- Por un punto **A**, trazar un plano paralelo a la recta de perfil **BC**.

Solución:

Rebatiendo las proyecciones horizontales **b** y **c**, ubicamos la verdadera posición de la recta de perfil **BC**; de la misma manera ubicamos la situación del punto a, en A. Por A, trazamos unaparalela a BC, que también será de perfil, la misma que al ser encontradas sus trazas, permite ver, que cualquier plano que pase por ellas, cumple con lo requerido. (fig. 91)

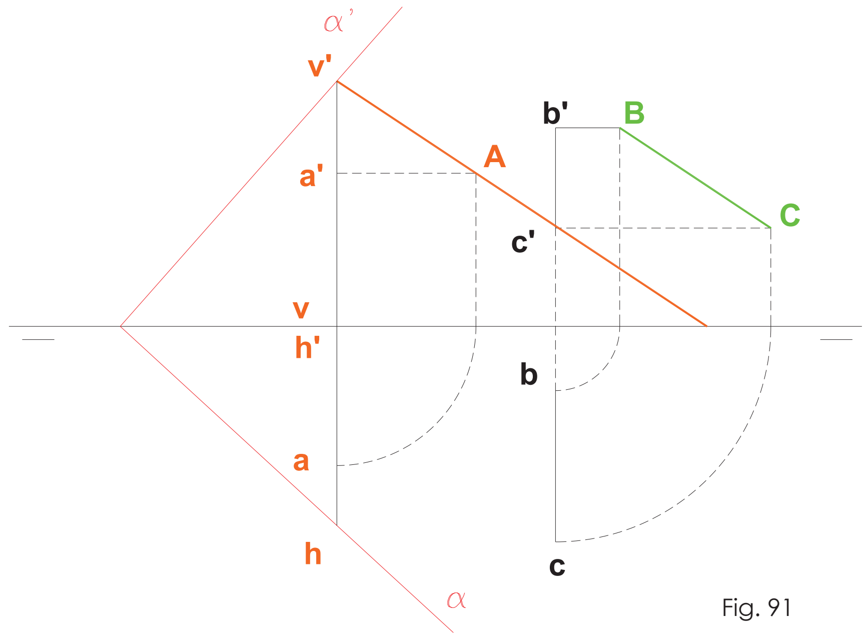


Fig. 91

7.- Determinar las trazas del plano que conforman la recta **AB** que le es de máxima inclinación, y otra recta **MN** del mismo que pasa por la línea de tierra. (fig. 92)

Solución:

Como **MN** es del plano, **N** el punto en que están sus trazas, por ser una recta que pasa por la línea de tierra, y **AB**, es de por ser una recta que pasa por la línea de tierra, y **AB**, es de máxima inclinación del plano, trácese directamente una perpendicular a **a' b'**, por **v'** traza vertical de **AB**; esta traza pasará necesariamente por **n'**, y de allí unimos con **h**, traza horizontal de **AB**, pues ésta se corta con **MN** en **o – o'**, eterminando por tanto el plano buscado.

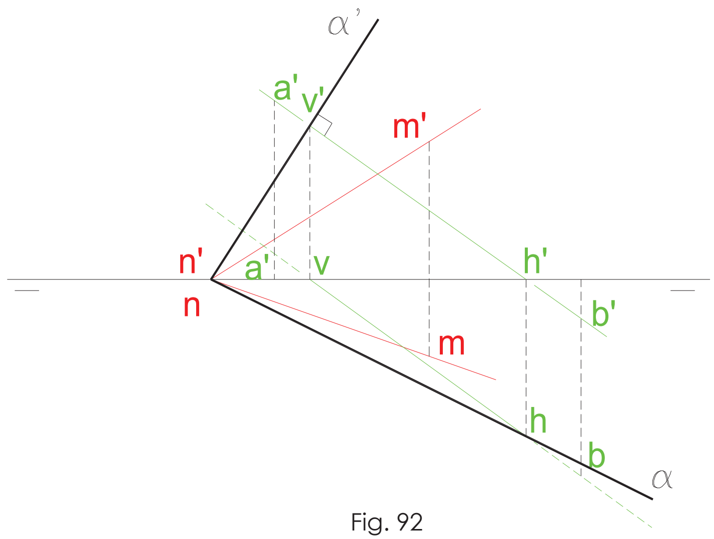


Fig. 92

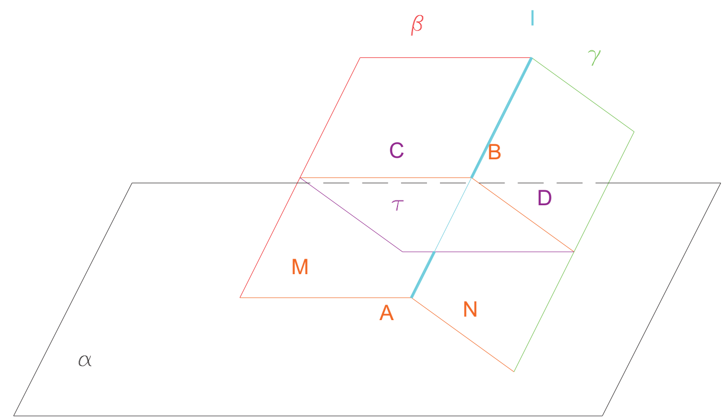


Fig. 93

INTERSECCION DE PLANOS:

Dos planos se cortan, cuando éstos no son paralelos, o dicho de otra forma, cuando son secantes, y su intersección, siempre es recta llamada línea de tierra.

Por tanto, no hay intersección de planos cuando ellos son paralelos.

Para obtener la intersección de dos planos, hay que determinar dos puntos comunes a ambos. (fig. 95)

Sean los planos β y χ que se cortan segœn la recta **l**. Para hallarla, hay que valerse de dos planos auxiliares β y χ que determinan los puntos **A** y **B**. (fig. 93)

Los pasos a seguir son:

primero: las intersecciones de **M** y **N** con α nos da **A**.

segundo: Las intersecciones **C** y **D** con τ ambos da **B**.

tercero: la unión de **A** y **B**, nos da la recta de intersección **I**.

Pareciera un contrasentido todos estos caminos ampulosos para determinar lo que a primera vista es simple; pero no es así, porque los planos auxiliares que se toman, o están dados, o son fáciles de determinar.

Aplicaciones al sistema diédrico: Elegimos como auxiliares los planos horizontal (**H**) y vertical (**V**). Así las intersecciones con los planos de proyección, son precisamente las trazas de los planos β y γ. (fig. 94)

Las intersecciones de las trazas verticales β' y γ' nos da **B**, y β con γ dan **A**, que unidos nos dan la recta **I**.

Por lo tanto, para hallar la intersección de dos planos, basta hallar las intersecciones de sus trazas homónimas. (fig. 95)

α' y β' dan **b-b'**
α y β dan **a-a'**

Puede ocurrir que las trazas de los planos no se corten en el límite del dibujo, por lo que se acude en esas circunstancias a planos auxiliares.

Hay que tener en cuenta, que no siempre la intersección de los planos se da como en los casos explicados; puede ser que las trazas horizontales se corten encima de la línea de tierra, o las verticales, abajo, como ocurre en la figura 96.

Intersección de un plano cualquiera con uno paralelo a los de proyección: Se trata de hallar la intersección del plano horizontal **H'** con otro cualquiera α'–α .

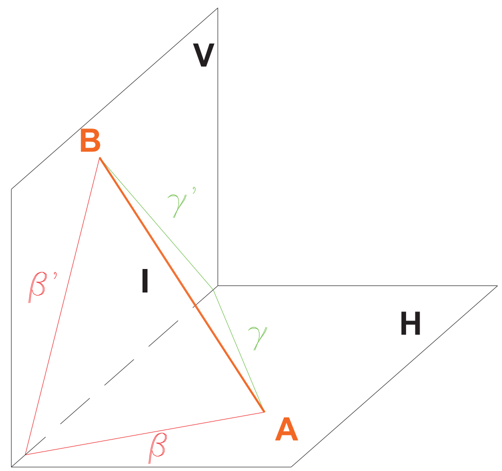


Fig. 94

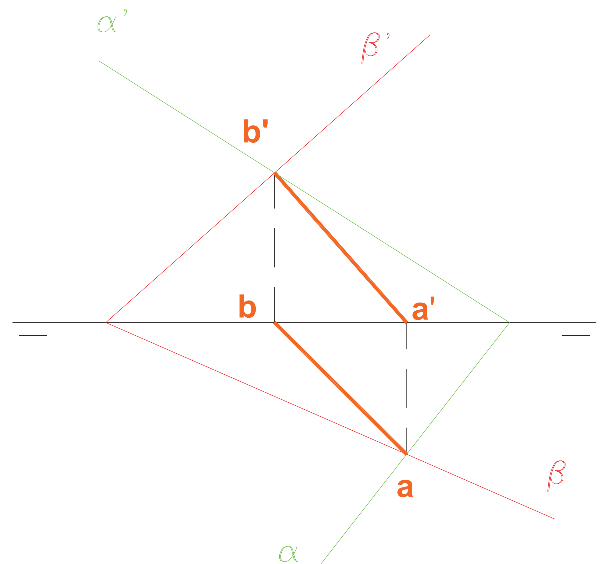


Fig. 95

La intersección de un plano horizontal con otro cualquiera da una recta horizontal de ese plano. Para hallarla, se determina el punto de corte o intersección de las trazas verticales **v–v'**, y enseguida la horizontal **r–r'**. La proyección **r** será paralela a **a** y la vertical **r'**, será coincidente con **H'**. (fig. 97)

La intersección **f–f'** del plano frontal **F** con el α'– α**,** es una frontal de dicho plano, determinada por su traza horizontal **h–h'** que es el punto de intersección entre **F** y α**,** estando **f** confundida con **F**, y siendo **f'** paralela a la traza α' del plano.

Ambas rectas además deben cortarse en un punto **a–a'** por estar situadas en el plano.

Si dos planos tienen dos trazas paralelas, se determina la traza corrrespondiente a las trazas que se cortan, y la proyección correspondiente a las trazas paralelas,será paralela a ellas, siendo la otra, paralela a la línea de tierra. (fig. 98)

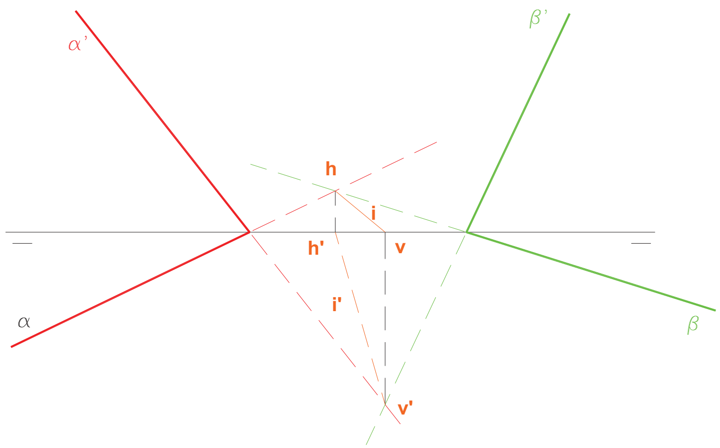


Fig. 96

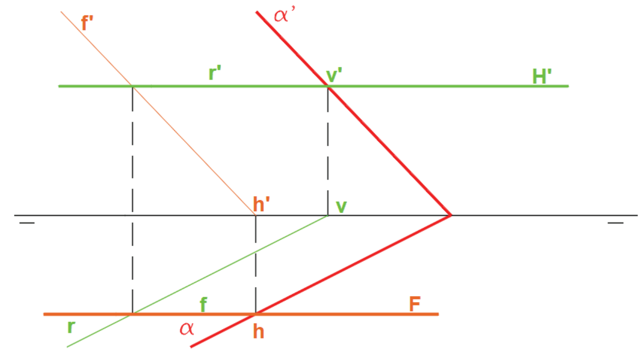


Fig. 97

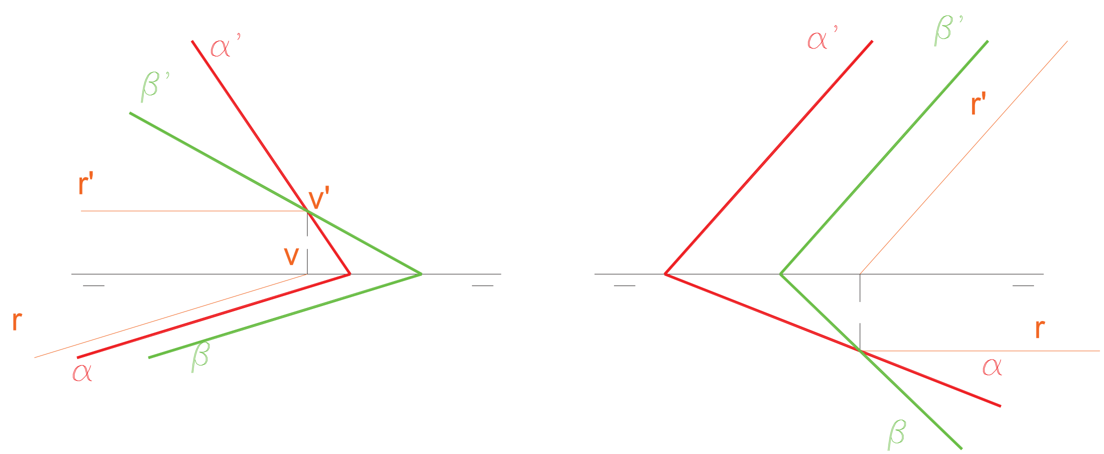


Fig. 98

SINTESIS:

Como resumen del tema “intersección de planos”, pasamos a realizar un ejercicio que compendie en uno, todo lo que hasta el momento se ha visto desde el punto hasta el tema que acabamos de ver en los últimos ejercicios. (fig. 99)

Vamos a encontrar la intersección de dos planos, uno α**,** determinado por tres puntos no colineados, y otro, β, determinado por una recta oblícua T que va del segundo cuadrante al cuarto, pasando por el primero, que le es de máxima inclinación.

A: primer cuadrante
B: cuarto cuadrante
C: tercer cuadrante y primer bisector

Pasos a seguir en el presente ejercicio:

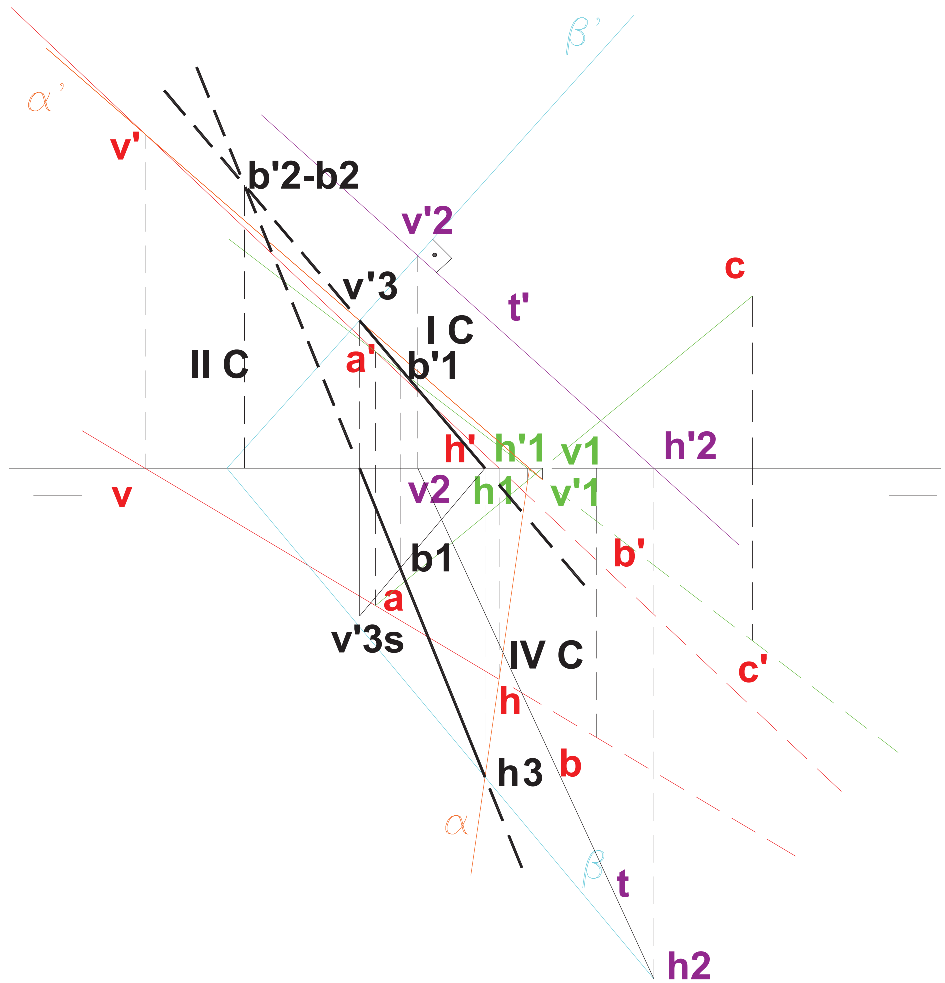
1) Se une los puntos a y b, determinando una recta con trazas v’-v y h-h’.

2) La unión de los puntos c y d nos determina otra recta con trazas v’1-v1 y h’1-h1.

3) La unión de las trazas homónimas de estas dos rectas nos determina el **plano α, es decir, v’ – v’1 da α’ en tanto que h y h1, determina α.**

4) Nos damos seguidamente la recta T de las características del enunciado, como debe ser de máxima inclinación del plano, por la traza vertical **v’2 de ésta, trazamos la traza vertical β’: y donde corte a la línea de tierra, unimos con h2, determinando de esta manera la traza horiaontal β del plano.**

5) Seguidamente procedemos a encontrar la intersección de las trazas homónimas de ambos planos, encontrando de esta manera la recta I, a la que le encontramos todos sus elementos como se hizo en anteriores ejercicios.



β'
α'
v'
b'2-b2
v'2
c
v'3
t'
I C
II C
a'
b'1
h'
h'1
v1
h'2
v
v2
h1
v'1
b1
b'
a
v'3s
c'
IV C
h
h3
b
α
β
t
h2

Fig. 99

Intersección de dos planos cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo:

Se trata de los planos α y β. Como sus trazas no se cortan dentro de los límites del dibujo, nos auxiliaremos de dos planos, primero un horizontal **H'**, que se corta con los dados, según las rectas **m–m'** y **n–n'**, que a su vez lo hacen en el punto **a–a'**.

Como segundo plano auxiliar, se toma el frontal **F**, que se corta con los planos dato, egún las rectas c – c' y d – d', que se intersectan en el punto b – b'.

La intersección de estos planos cuyas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo, es la recta i**–i'**, que es la unión de los puntos **A y B**

Si dos de las trazas de los planos se cortasen en el dibujo y las otras fuera de él, basta por regla general hallar el punto de intersección de las trazas que se cortan

Casos particulares de intersescción de planos:

Planos proyectantes con otro cualquiera: (fig. 101) Hay que determinar las trazas **v–v'** y **h–h'** de la recta de intersección.

Como proyectante horizontal, todas las proyecciones horizontales deben coincidir con su traza horizontal τ .

Plano proyectante con otro dado por dos rectas: (fig. 102) Por ser proyectante vertical, todas las proyecciones verticales de los elementos del plano τ se confundirán con la traza τ'.

Las rectas **r–r' y s–s'**, se cortan en el punto **a–a'** (condición para que determinen el plano). Aunque no se puede hallar directamente la intersección de recta y plano, en este caso es viable hallarla por tratarse de un plano proyectante. Los pasos a seguir son:

Recta **R** con τ, da **c–c'**

Recta **S** con τ**,** da **b–b'**

La solución es la unión de **B** y **C**.

DDD

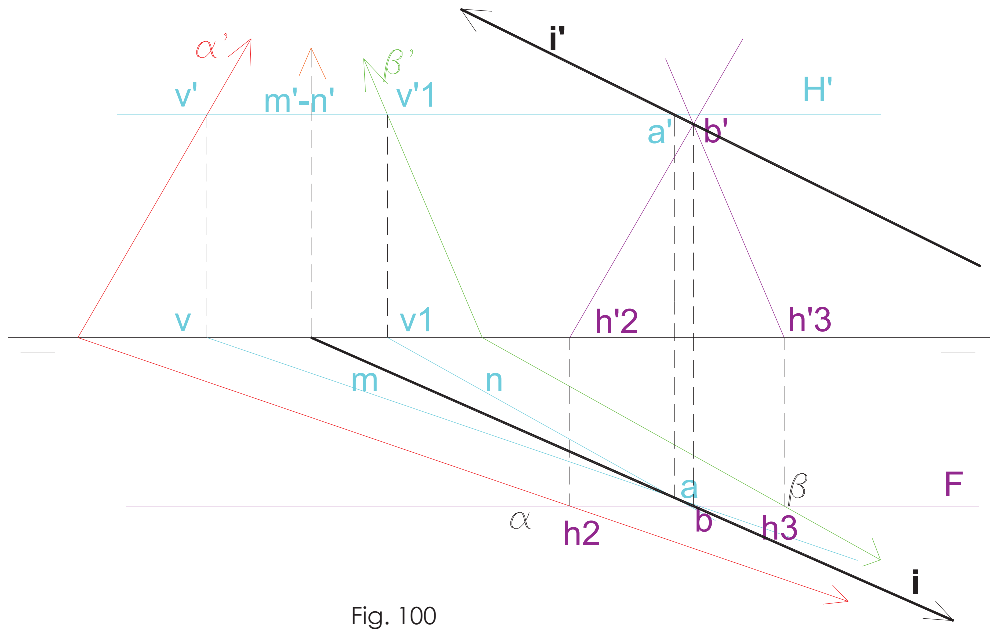


Fig. 100

Dos planos proyectantes: (fig. 103) Las proyecciones de la recta solución coinciden con las trazas de los planos.

Dos planos proyectantes verticales: (fig. 104) La solución es una recta de punta.

Dos planos proyectantes horizontales: La solución es una recta vertical.

INTERSECCION DE DOS FIGURAS PLANAS: A (por el sistema diédrico tradicional)

Sean los triángulos ABC y GFT.

La recta AB (v'–h) y la AC v'1 h1), determinan el plano A'–A.

La recta ET (v'2–h2) y la GT (v'3–h3), determinan el plano B'–B.

Ambos planos se cortan según la recta I

I corta a AB en x'–x, y a AC en y'–y; XY será la intersección de los dos triángulos, puntos bajo la misma perpendicular (coinciden con la sección dentro de las dos proyecciones de ambos triángulos) (fig. 99a)

B: Usando como auxiliares dos planos horizontales:

Trazar un plano horizontal H', que corte en 1 y 2 al triángulo FGH (1 en FH u 2 en FG)

El mismo plano corta en 3 y 4 al triángulo ABC (3 en AB y 4 en BC)

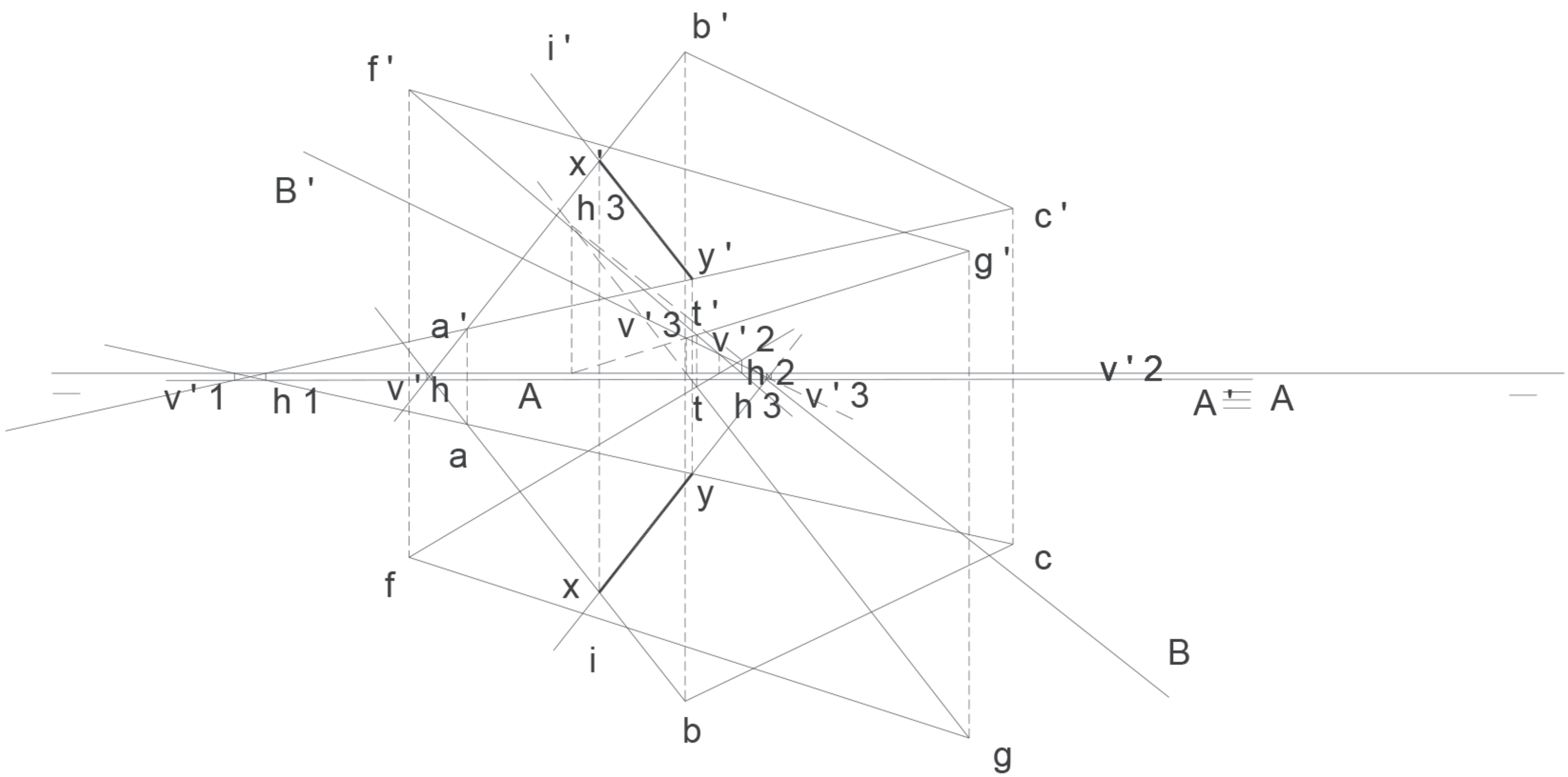
La rect 1-2 CORTA A LA 3 -4 EN X–X'

Un segundo plano horizontal T', corta en 5 y 6 al triángulo ABC. (5 en AB y 6 en AC).

El mismo corta en 7 y 8 al triánfulo FGH, (7 en FH y 8 en HG.

La recta 5–6, ccorta a 7–8 en y–y'.

X–Y es la intersección entre ambos triángulos. (fig. 99 b)



Intersección de planos

Fig. 99a

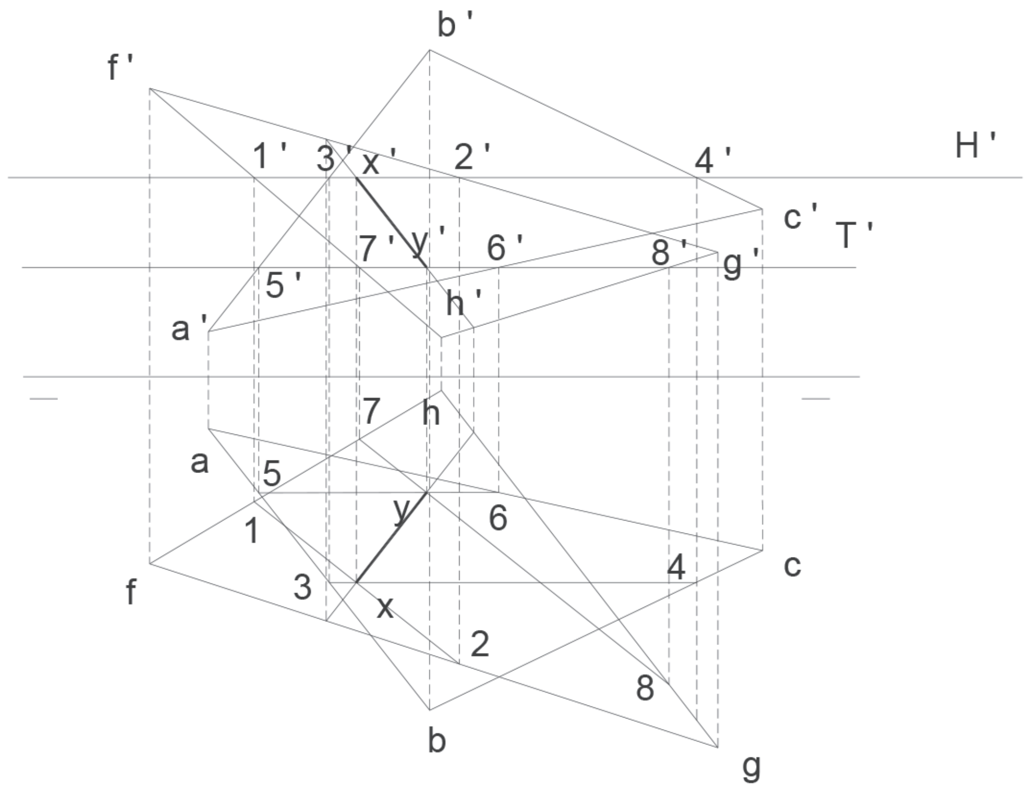


Fig. 99b

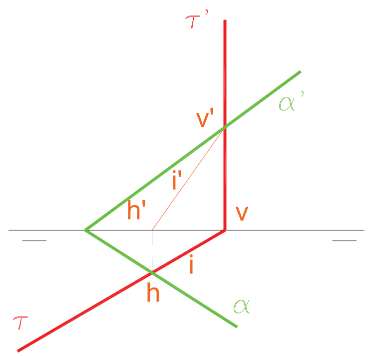


Fig. 101

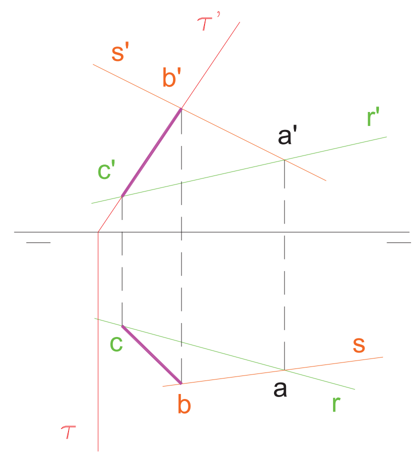


Fig. 102

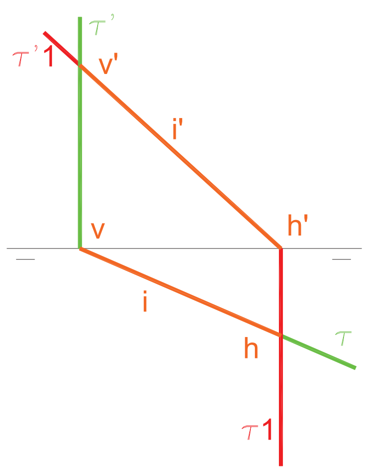


Fig. 103

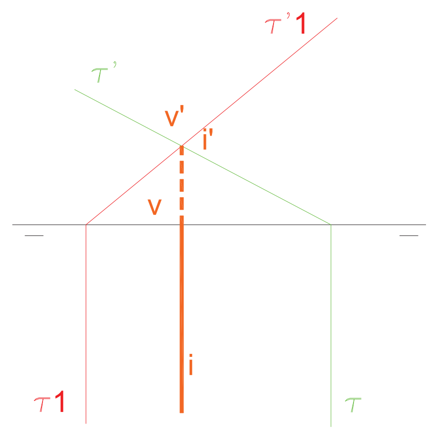


Fig. 104

Plano paralelo a la línea de tierra con otro cualquiera: (fig. 106)

Planos paralelos a la línea de tierra: (fig. 107) Si dos planos pasan por dos rectas paralelas, su intersección es también paralela a ellas, o dicho de otra forma: si dos planos son paralelos a una recta, su intersección es también paralela a ella

Se usa un plano auxiliar que en este caso es un proyectante horizontal que determinará dos rectas de intersección con los planos paralelos. La intersección de estas dos rectas nos da un punto por onde ha de pasar la recta solución que también por lo expuesto anteriormente será paralela a la línea de tierra. Los pasos a seguir son:

Plano α con τ da la recta **R**.

Plano β con τ da la recta **S**.

R y **S** se cortan en el punto **a–a'** que es por donde pasará la recta solución.

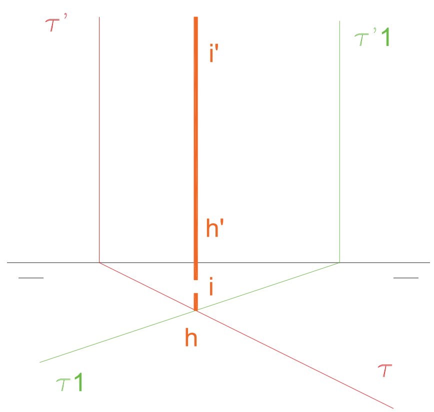


Fig. 105

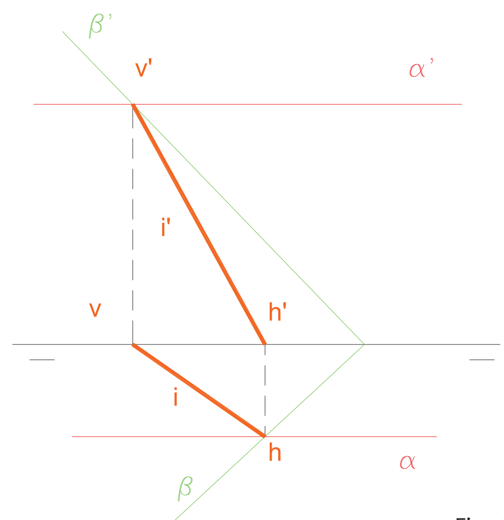


Fig. 106

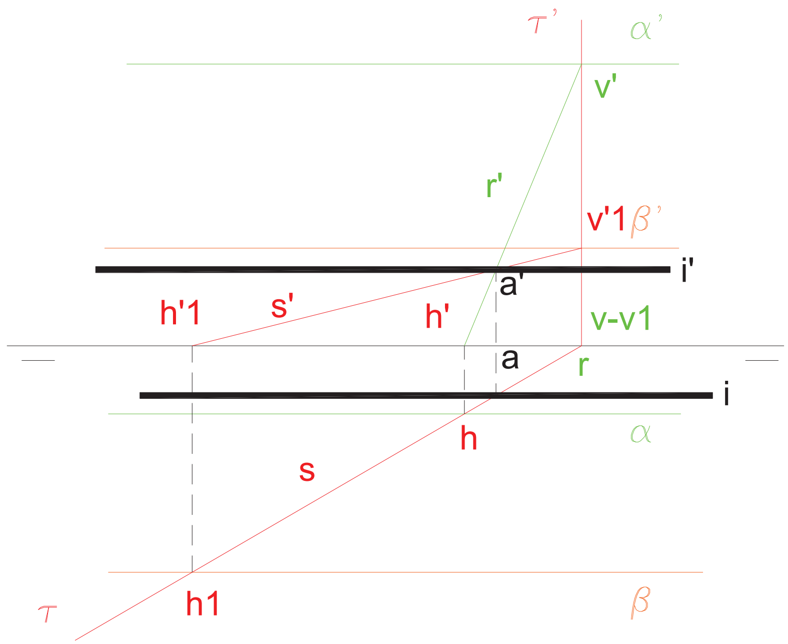


Fig. 107

Plano de perfil con otro cualquiera: (fig. 108) La solución es una recta de pefil.

Plano perpendicular al segundo bisector con otro cualquiera: (fig. 109)

En el caso de que ambos planos fueran concurrentes en la línea de tierra se procedería a buscar la solución, de la siguiente manera: (fig. 110)

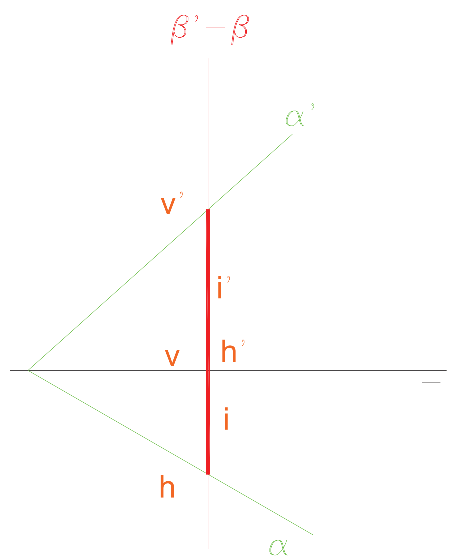


Fig. 108

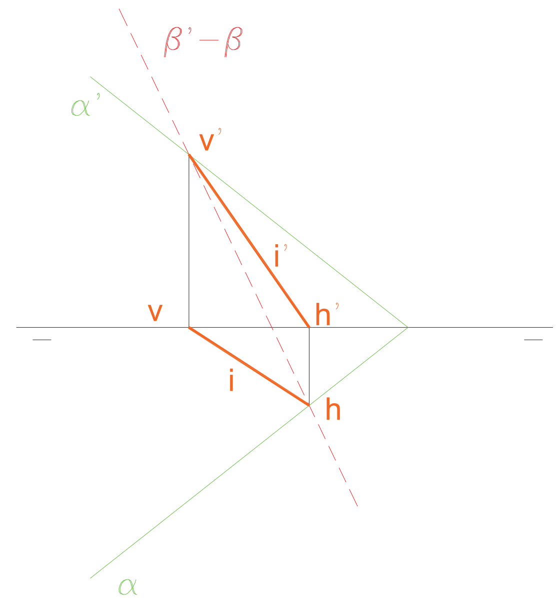


Fig. 109

Los planos se cortan en la línea de tierra en el punto **a–a'**. Nos auxiliamos de un plano horizontal que se cortará con los dos planos, según dos rectas horizontales:

α con **H'** da **R**

β con **H'** da **S**

La intersección de las proyecciones de las rectas **R** y **S** da el punto **b–b'**, que unido con el punto **a–a'**, da la recta solución **I**.

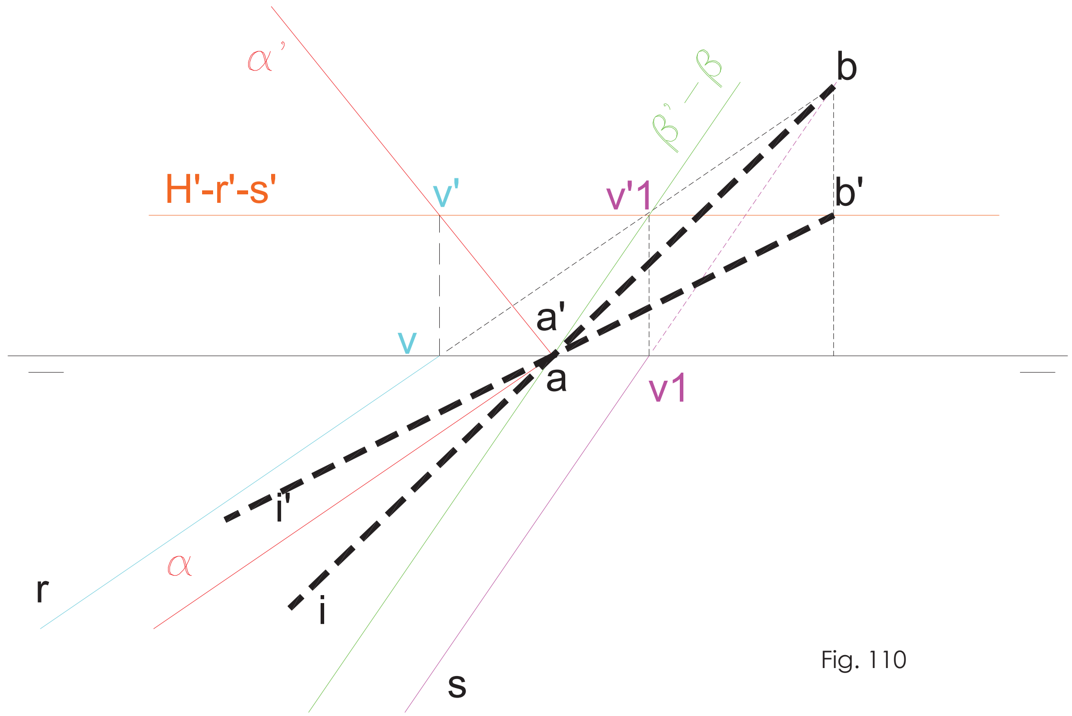


Fig. 110

Plano cualquiera con los bisectores: (fig. 111) Es un caso similar al anterior; los planos son concurrentes en la lÍnea de tierra, en el punto **a–a'**. Nos auxiliamos de un plano horizontal **H'**:

Con α da la recta **R**.

Con el primer bisector da la recta **S**, que además de ser horizontal, tiene sus proyecciones equidistantes de la línea de tierra.

La intersección de **R** y **S** nos da el punto b–b' que unido con a–a' da la solución **I**.

El razonamiento anteriormente explicado tiene aplicación en el caso de que el plano en cuestión sea el primer bisector.

Con el segundo bisector se procederá así:

Nos determinamos una horizontal cualquiera de α, y en la prolongación de la proyección horizontal de dicha recta, **el** punto **b2 –** b'2 que falta para determinar la recta de intersección, puesto que el otro punto es **a – a'** en la línea de tierra. (fig. 112)

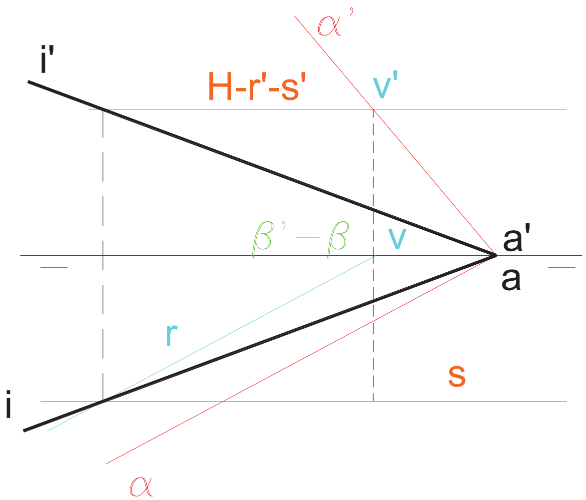


Fig. 111

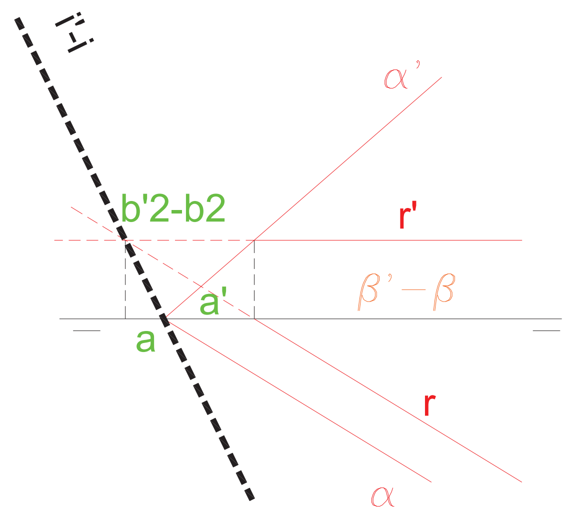


Fig. 112

Como ejemplo y aplicación va el siguiente ejercicio de intersección entre un cuadrilátero y un triángulo. (Pco. 1)

Se trata del cuadrilátero ABCD (α) (trazas v – v1 y h – h1) y el triángulo OPQ (β) (trazas h2 – h3 – v2)

Ambos dan la recta de intersección I (v4 – h4). Esta recta muestra los puntos Y y Z como los de intersección entre ambas figuras. (P1)

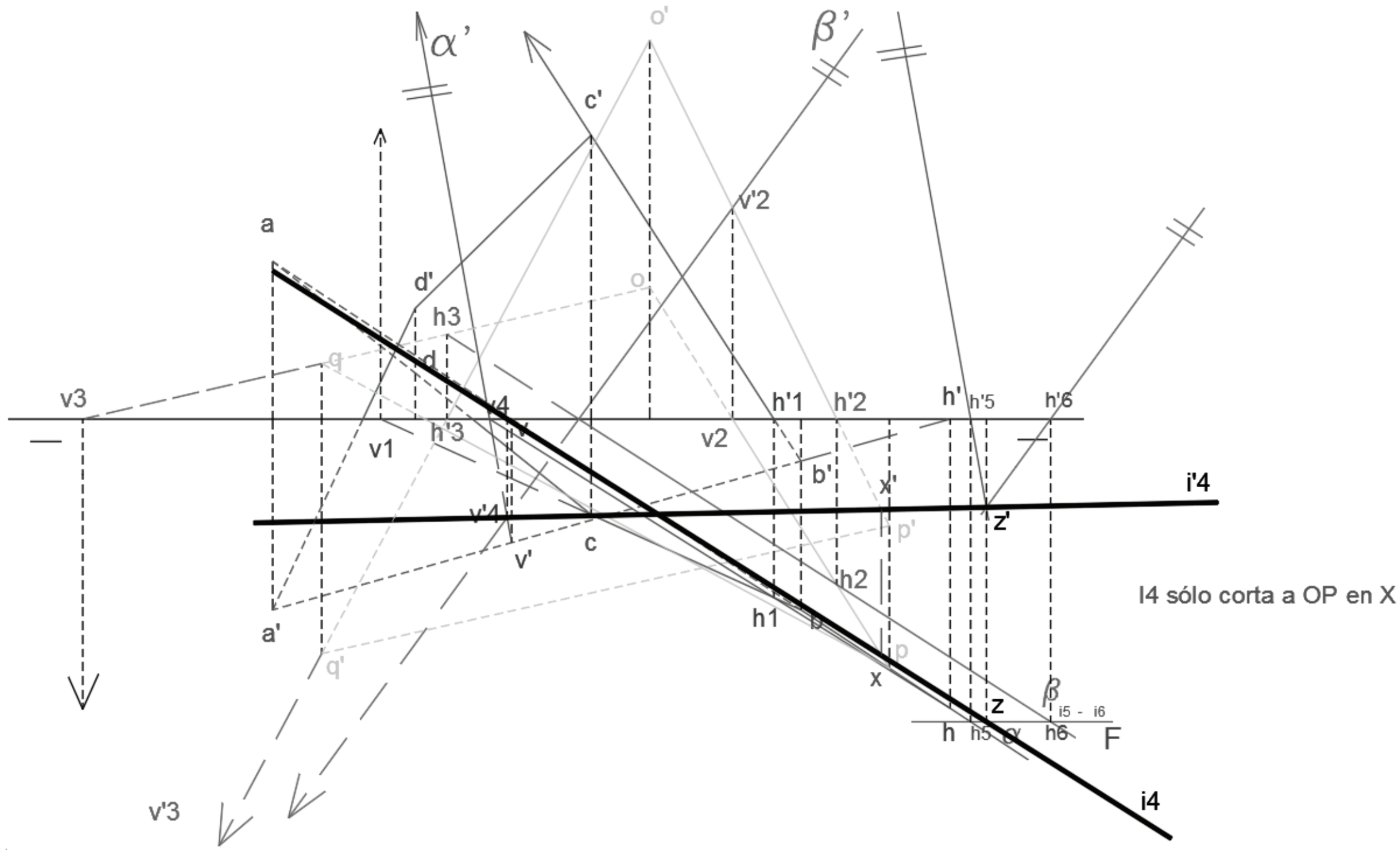


Fig. P 1

INTERSECCION DE RECTA Y PLANO:

Método general: Para hallar la recta de intesección de la recta **R** con el plano **a** se realizan los siguientes pasos: (fig. 113)

1° Por la recta R hacemos pasar el plano β.

2° Se halla la intersección de los planos α y β encontrando la recta S.

3° Se determina la intersección de las rectas R y S en el punto I.

Para encontrar su aplicación en el sistema diédrico, se siguen los pasos indicados, en la fig. 114:

La recta dato es la **r – r'** y el plano dado es el α. Por la recta **r–r'** hacemos pasar un plano cualquiera, que para facilitar la operación se tratará de un plano proyectante, que es en el presente caso uno horizontal, que corta al plano α según la recta **s–s'**. Las rectas **r – r'** y **s – s'**, se cortan en el punto **i – i'** que es la intersección entre la recta **R** y el plano.

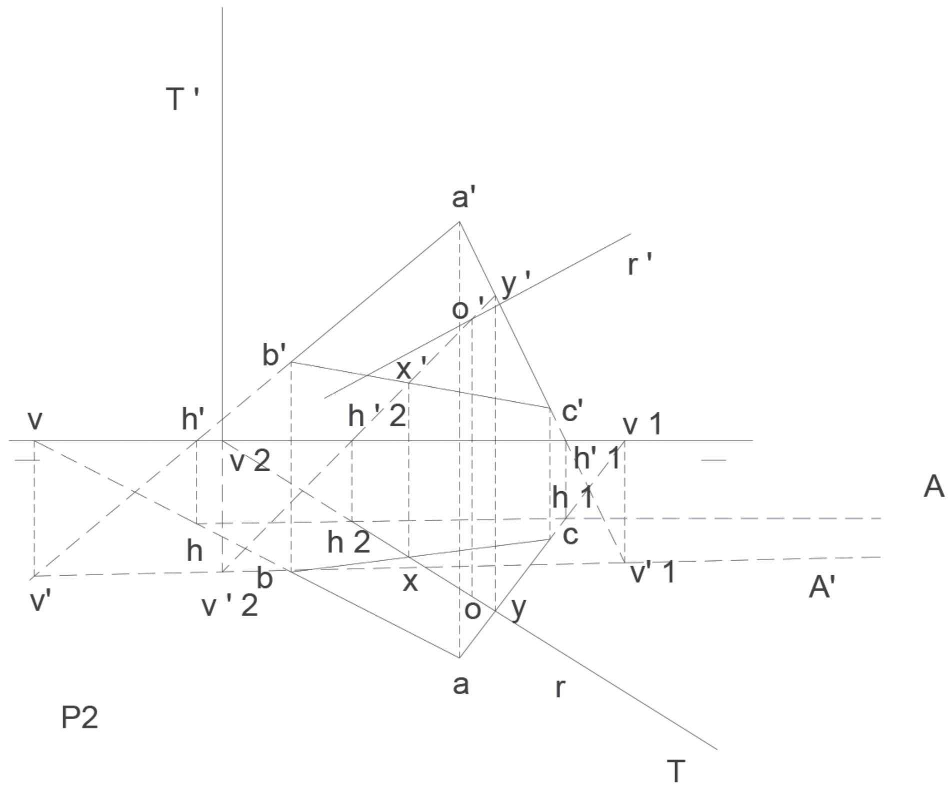
Intersección de recta y plano:(Fig. P2)

Se trata de un plano ABC (triángulo) que es cortado por la recta R.

Por dos de sus rectas: AB (h–v') y AC (h1–v'1) se determina el plano A A'.

Mediante un plano proyectante horizontal que pase por la recta R, se determina la intersección o–o'.

Por la inclinación presentada por la recta, la proyección vertical es visible de **o'** hasta **a'c'** y siguiendo hacia arriba; en tanto que horizontalmente lo será de **o** hasta **ac**, siguiendo hacia abajo. (Fig. P2a)



Intersección de recta y plano - partes visibles y ocultas

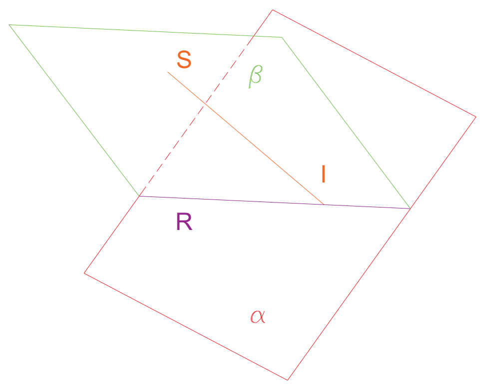


Fig. 113

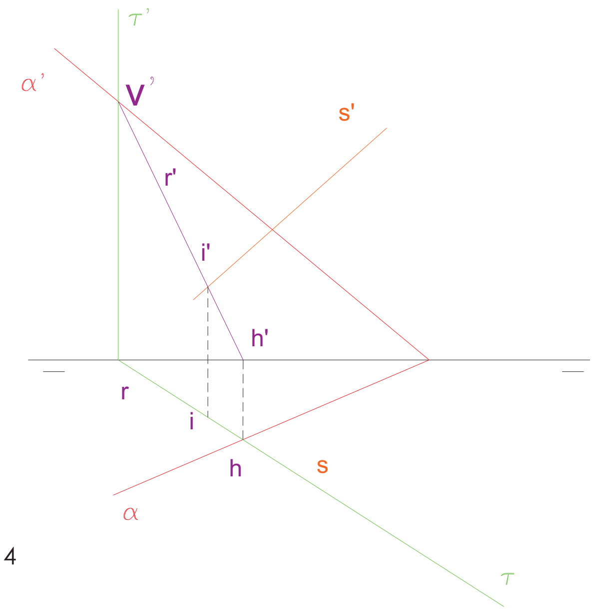


Fig. 114

Intersección de una recta con un plano dado por dos rectas que se cortan: (fig. 115)

R es la recta y **S** con **T** forman el plano α .

Los pasos a seguir para la realización del presente ejercicio son como siguen:

1° Se traza un plano τ por R.

2° Hallar las intersecciones A y B del plano con las rectas S y T.

3° Encontrar el punto de intersección de la recta AB con R en el punto I, que es lo que se pide.

Para hallar su aplicación en el sistema diédrico, se procede como sigue: (fig. 116)

- Sea la recta **r–r'.**

- Las rectas **s–s'** y **t–t'** se cortan en el punto **o – o '.**

Usar un plano proyectante vertical por **r–r'**; dicho plano corta a la recta **s–s'** en el punto **b–b'**, y a la recta **t–t'** en el punto **a–a'**.

- La intersección de **ab–a'b'** con **r–r'** es el punto **c'–c** buscado.

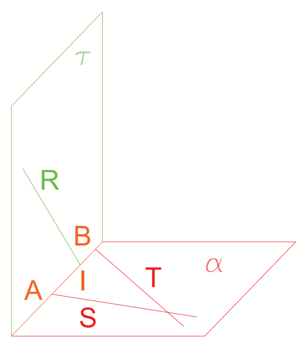


Fig. 115

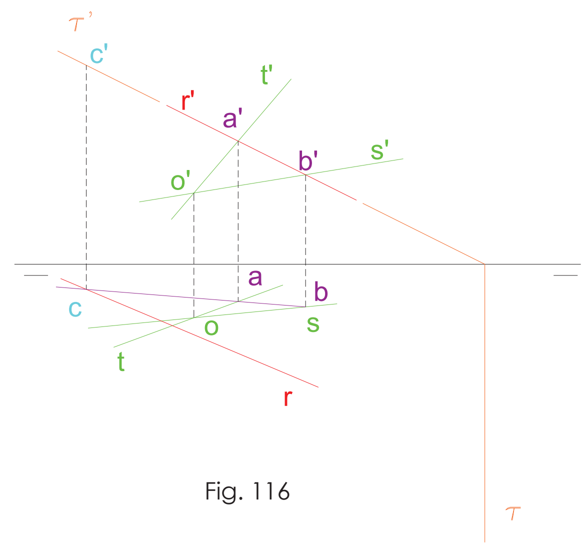


Fig. 116

Recta que corta a otras tres:

Método general.- Sean las rectas **R, S,** y **T**. Supangamos que dichas rectas se cortan dos a dos.

Las rectas **R** y **S**, determinan el plano α**.** La recta **T** corta al plano α en el punto **A**. Toda recta que pase por **A**, cumple esta condición, por lo tanto hay infinitas soluciones. (fig.117)

Si las rectas no se cortasen, sino que se cruzaran dos a dos, hay también infinitas soluciones pudiéndose emplear para hallarlas cualquiera de los siguientes procedimientos:

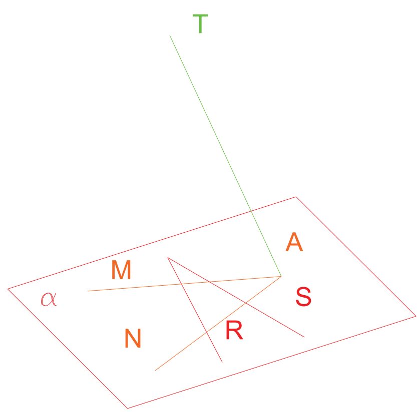


Fig. 117

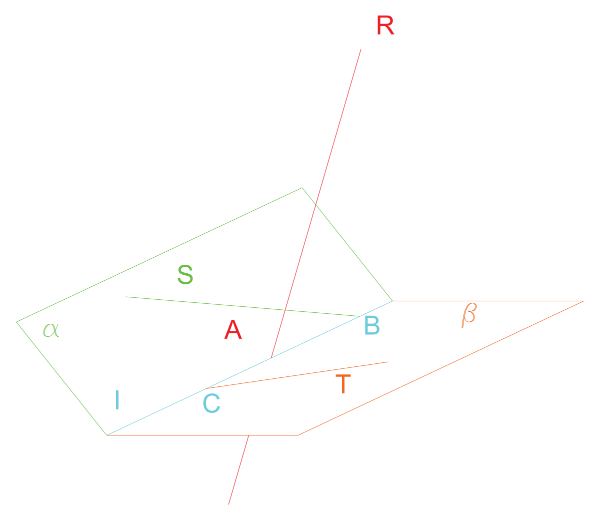


Fig. 118

Primer procedimiento: (fig. 118 y 119).

- Se elige el punto **A**, de R por ejemplo y se hallan los planos α y β que dicho punto determina con las otras dos rectas.
- Se halla la intersección **I** de ambos planos que es la recta pedida pues corta en **C, A** y **B** a las tres rectas.

Pasos a seguir en el depurado:

Datos: Recta **R**: (**v–h, v'–h'**)
Recta **S**: (**v1–h1, v'1–h'1**)
Recta **T**: (**v3–h3, v'3–h'3**)

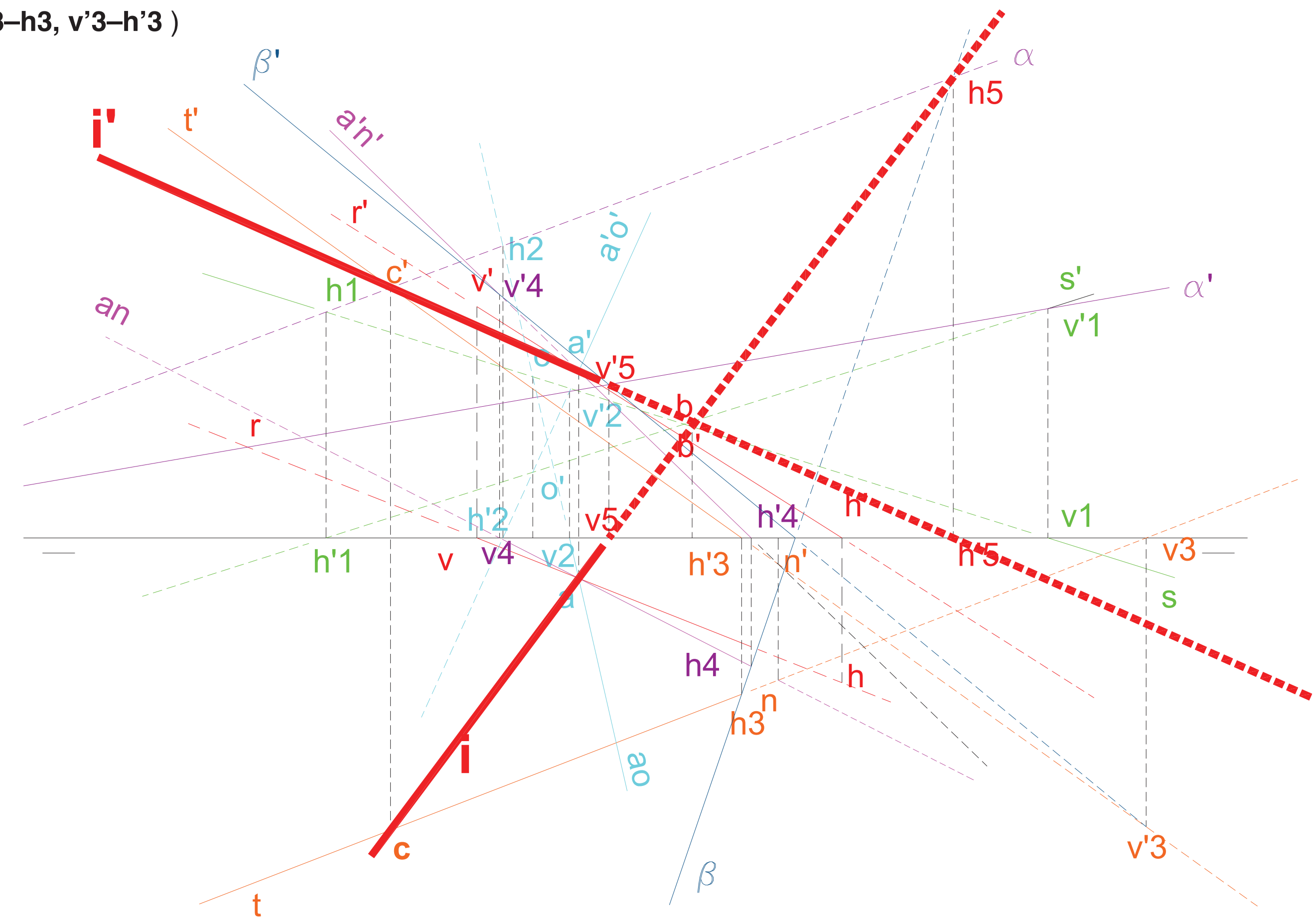


Fig. 119

1º.- Nos damos un punto cualquiera en la recta **R** (**a–a'**)

2º.- Otro punto cualquiera, esta vez en la recta **S (o o')**

3º.- Las rectas **A–O** (**v2–h2, v'2–h'2**), y **S**, nos determinan el plano α**.**

4º.- Ubicamos un punto, ahora en la recta **T**, (**n–n'**)

5º.- Las rectas **A–N** (**v4–h4, v'4–h'4**), y **T**, determinan el plano β .

6º.- Encontramos la intersección de los planos α y β, en la recta **I** (**h5–v5, h'5–v'5**)

7º.- La recta **I** es la solución, la misma que corta a las tres rectas que son dato del problema, de la siguiente manera:

- a la recta **R** la corta en el punto **A**, que es el de partida.
- a la recta **S** la corta en el punto **B**.
- a la recta **T** la corta en el punto **C**.

Segundo procedimiento: (fig. 120 y 121).

- Por una de las rectas, por ejemplo la **S**, se hace pasar un plano cualquiera α**.**
- Se halla la intersección de este plano con las otras dos rectas, siendo **AB** la recta buscada.

Recta que corta a otras dos rectas y es paralela a un plano: (fig. 122 y 123).

S y **T** son las rectas, y **α** es el plano. Para resolver el ejercicio se procede como sigue:

1º.- Trazar un plano **b** paralelo a **α**.
2º.- Hallar la intersección de **S** y **T** con el plano **b**. La recta **R**, solución, es la determinada por la unión de **A** y B.

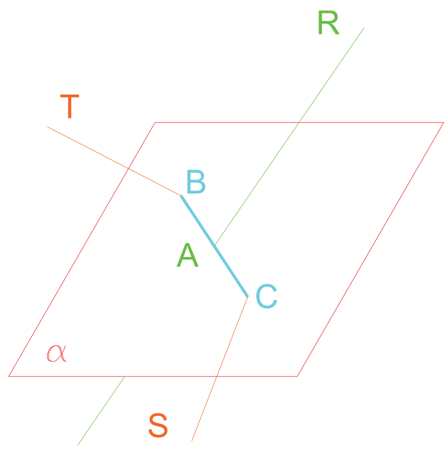


Fig. 120

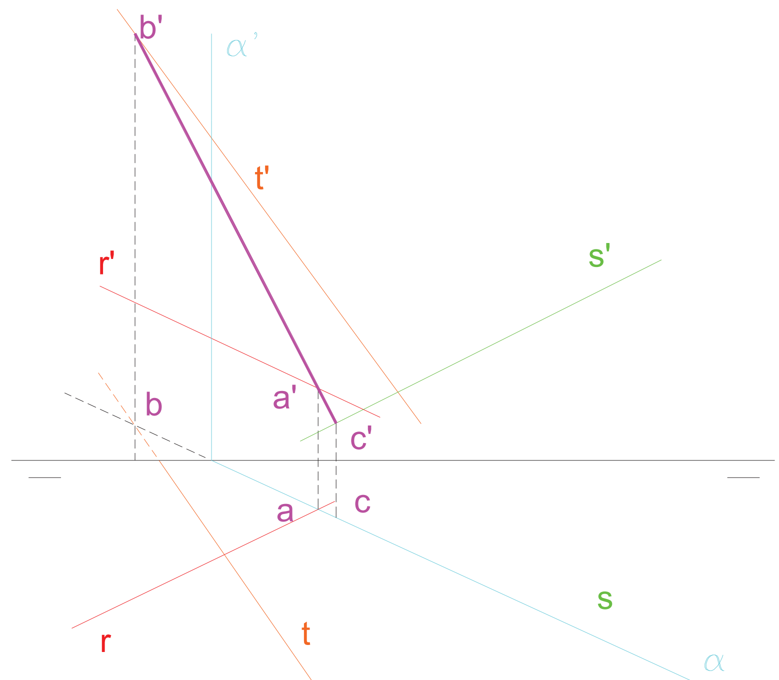


Fig. 121

En el sistema diédrico, su aplicación en el depurado es así: (fig. 123).

- Se traza un plano β paralelo al α .
- Se halla la intersección **a–a'** y **b–b'** de las rectas dadas con β**.-**
- El punto **a–a'** se determina por el plano auxiliar **ζ** que corta a β según la recta **m–m'**, la que a su vez lo hace a **t–t'**, en **a–a'**.
- Para determinar **b–b'** se utiliza el plano **γ** cuya intersección **n–n'** con β corta a **s–s'** en **b–b'**.
- La recta pedida es la **ab–a'b'**

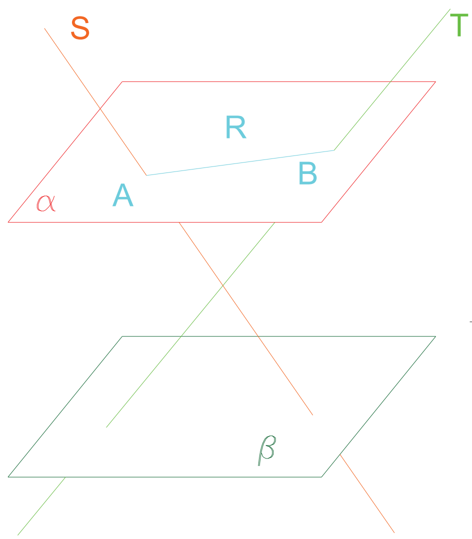


Fig. 122

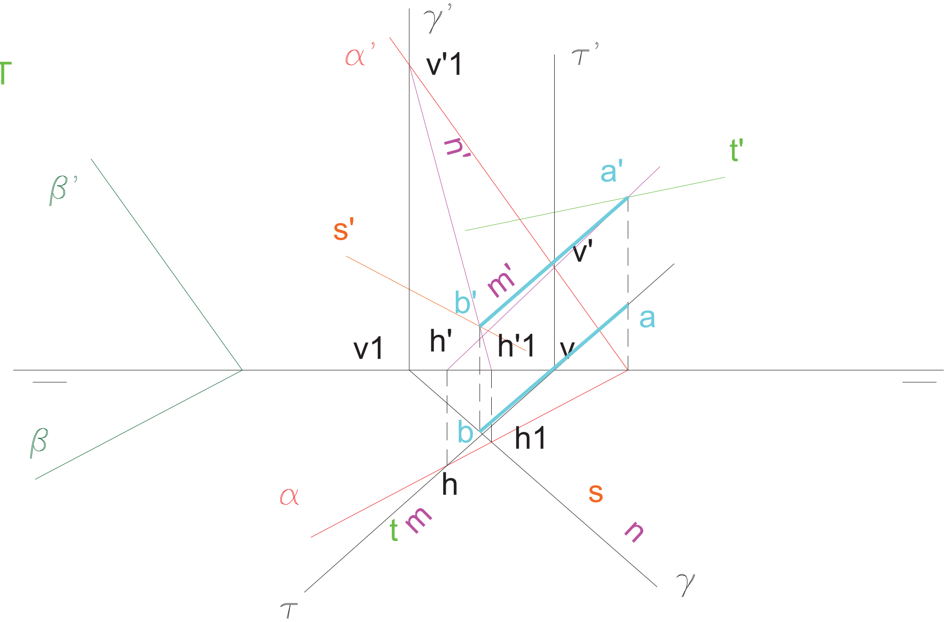


Fig. 123

Recta que corta a otras dos y es paralela a una tercera recta:

Puede ocurrir que las rectas se crucen o no. Si se cruzan, y **T** es la recta a la que ha de ser paralela la recta pedida: (fig. 124 y 124 a)

- Por un punto de **A** de una de ellas, por ejemplo la **R**, se traza **T'** paralela a **T**, que con **R** determinan el plano α , paralelo a **T**.
- Se halla **B**, intersección de **S** con el plano α**.**
- Por **B**, se traza una paralela a **T (BC)** contenida en el plano α que corta a **R** en **C. BC e**s la recta pedida.

Si las rectas se cortan (**R** y **S**), forman al plano α . Si T es paralela a α, cualquier recta paralela a **T** que esté situada en el plano, como la **Y**, resuelve el problema (fig. 125 y 125 a). Si **T** no fuera paralela, el problema no tendría solución, puesto que cualquier recta como la **I**, que corta a **R** y **S**, estaría contenida en el plano α y por lo tanto no podría ser nunca paralela a la **T** por no ser esta última paralela a α.

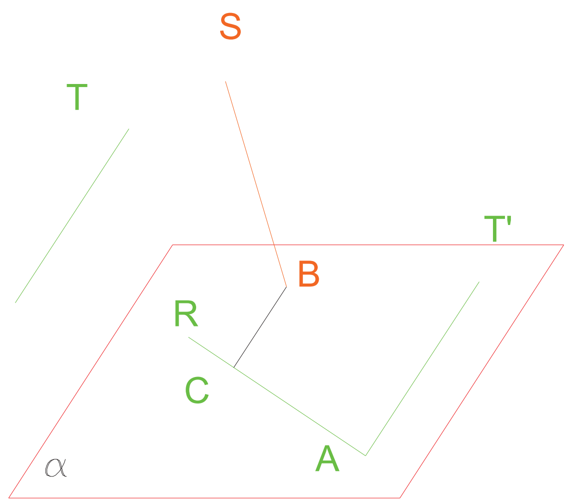


Fig. 124

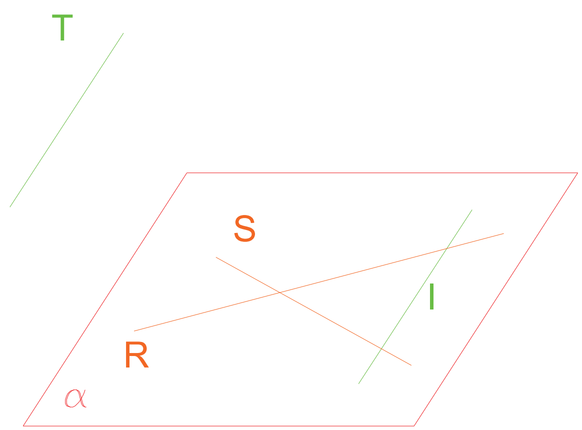


Fig. 125

Dadas dos rectas S y R, que se cruzan, trazar una tercera recta que corte a ambas y sea paralela a LT.

- Se traza el plano α paralelo a LT y que pase por la recta **R**, para lo cual ambas trazas pasarán por las trazas de la recta.
- Se pasa por **S** un proyectante y se halla la intersección **b–b'** con la recta **S**.
- La recta buscada es **bc–b'c'**, paralela a LT trazada por **b–b'** y que corte a **R** en **c–c'** (fig. 126).

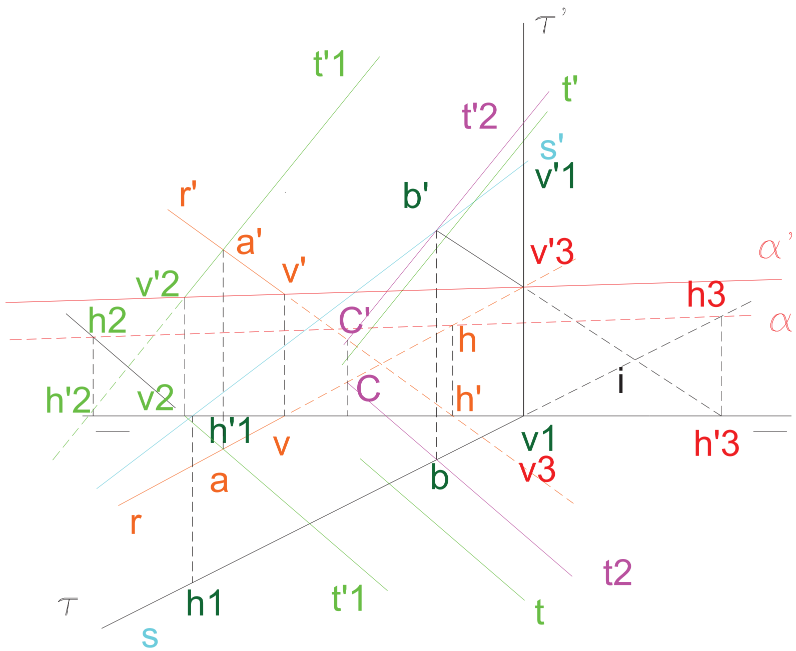


Fig. 124a

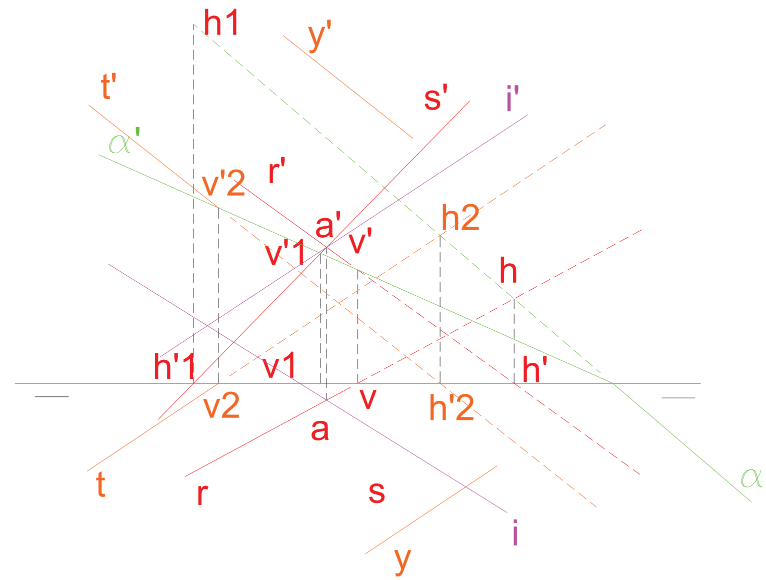


Fig. 125a

EJERCICIOS:

1.- Determinar la intersección de un plano horizontal, con otro paralelo a la línea de tierra.

Por ser la recta la intersección, perteneciente a ambos, será a su vez horizontal, y paralela a la línea de tierra. Para su solución nos auxiliamos de un plano cualquiera, como el que se observa en la figura 127. El plano α determina dos rectas de intersección con los planos dato, las mismas que se cortarán en un punto comœn **o'–o**. Por éste trazamos una recta paralela a la línea de tierra, que es la solución.

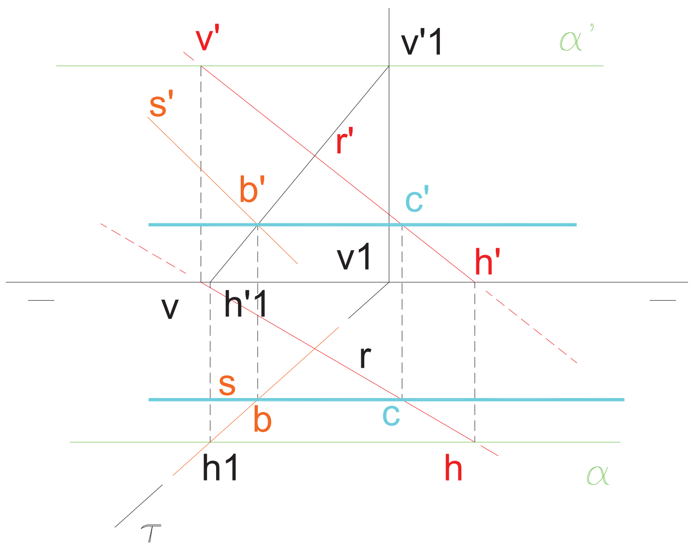


Fig. 126

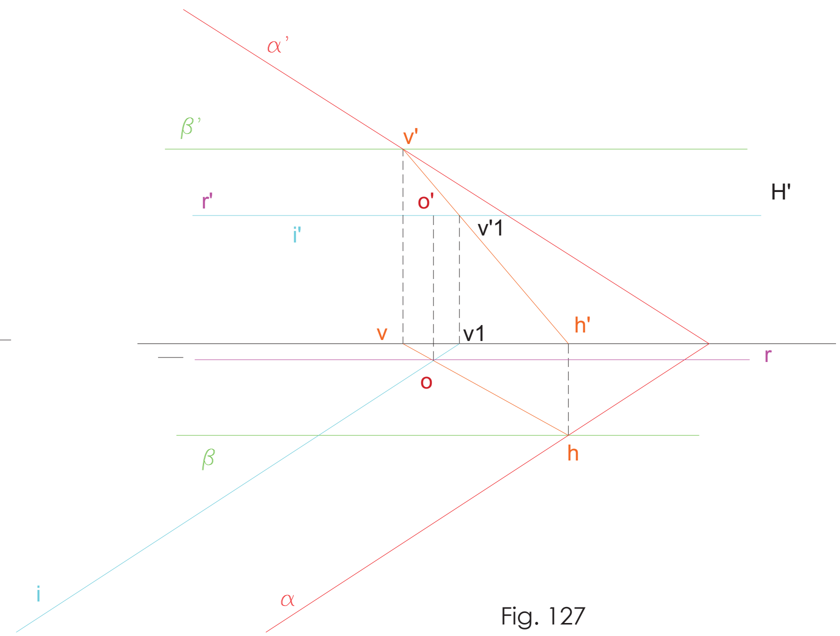


Fig. 127

2.- Encontrar la intersección de dos planos que tienen común su punto de intersección de trazas con la línea de tierra (**t'–t**) y cuyas trazas de nombre contrario, coinciden. (fig. 128)

Para solucionar este problema, nos damos un plano auxiliar horizontal **H'**, que se va a cortar con ambos, según dos rectas horizontales, la **r'- r**, y la **s'- s**. Como bien se sabe, las proyecciones verticales de estas rectas, coinciden con la traza horizontal **H'**, pero sus proyecciones horizontales se van a cortar en un punto común **o'- o**, que unido con el **t'- t** (que ya es un punto de la intersección), nos determinan la recta solución.

3) Determinar la intersección de los planos definidos, uno por su recta **AB** de máxima pendiente, y el otro, por el de su máxima inclinación **CD**, sin usar las respectivas trazas. (fig. 129)

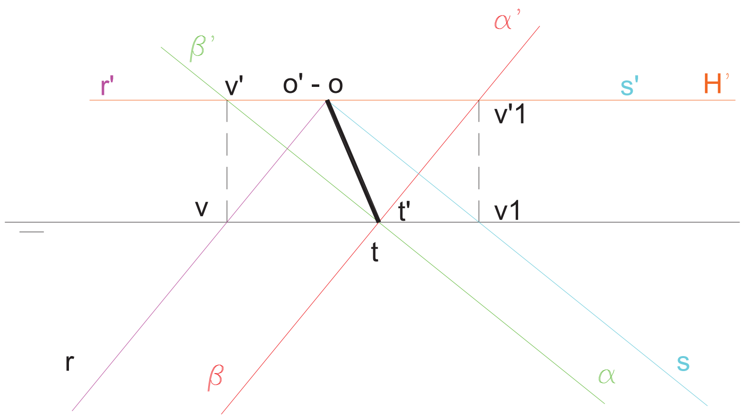


Fig. 128

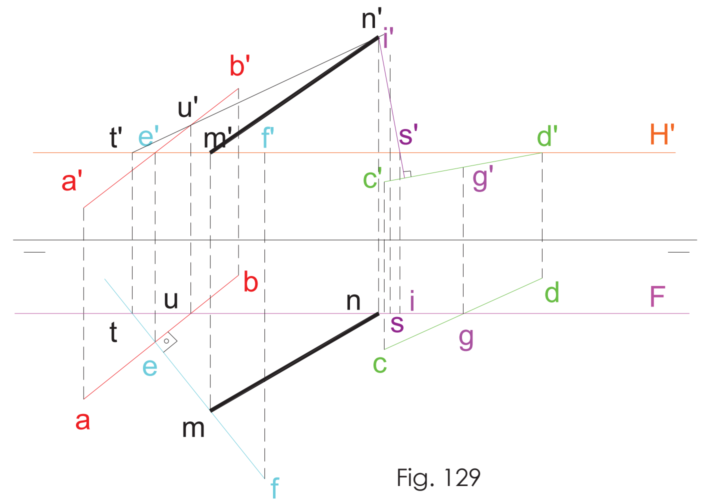


Fig. 129

Nos damos un plano auxiliar **H'**, cuya intersección con el plano definido por **AB**, es la horizontal **EF**, cuyas proyecciones son **e' f'** y **e f**, (perpendicular a **ab**, por ser ésta de máxima pendiente del plano).

Seguidamente, trazamos un segundo plano auxiliar, el frontal **F**, cuya intersección con el plano definido por **CD**, es la fronta **IG**, cuyas proyecciones son **i'g'** e **ig** (**i'g'**, es perpendicular a **c'd'**, por ser ésta de máxima inclinación del plano).

Nos encontramos ahora en presencia de dos planos definidos por las rectas concurrentes **BE, EF** e **IS y GD.**

El plano **H'** corta al primero en el punto **E**, de concurrencia, y al segundo, según la horizontal **SD**; donde ésta encuentre a **ef**, tenemos **m'–m**, uno de los puntos de la intersección.

El plano **F** corta al segundo, en el punto **G** de concurrencia, y al primero según la frontal **UT**, cuya proyección vertical **u' t'**, encuentra a **i'g'**, en **n'** (**n' n**), que es el otro punto de la intersección.

La unión de **M** con **N**, es la solución.

4) Hallar la intersección de la recta **AB**, con el plano formado por **CD** y **DE**, que se cortan. (fig. 130)

Se traza por **AB**, un proyectante vertical **ζ** que corta a **DE**, en **G**, y a **CD**, en **F**. Uniendo **F** y **G**, obtenemos **I**, intersección buscada.

5) Encontrar el punto donde la recta de perfil **AB**, atraviesa al plano α, y que es perpendicular al primer bisector. (fig.131)

Por ser el plano perpendicular al primer bisector, sus trazas son simétricas respecto de la línea de tierra. Rebatiendo el plano de perfil que contiene a la recta **AB**, encontramos el punto **I**, donde ésta corta al plano.

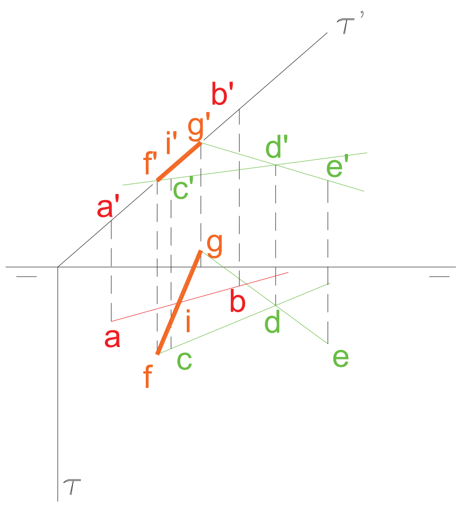


Fig. 130

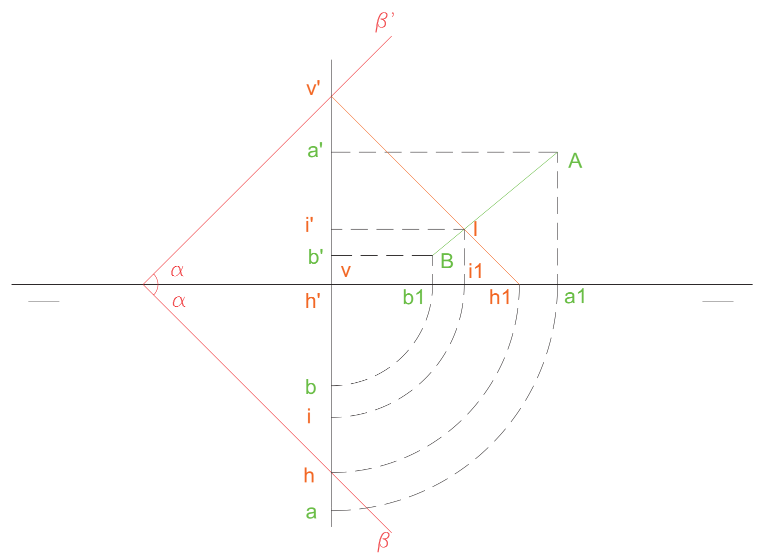


Fig. 131

6) Determinar la intersección de un plano por otro dado por su recta de máxima pendiente sin que tenga que usarse las trazas de éste. (fig. 132)

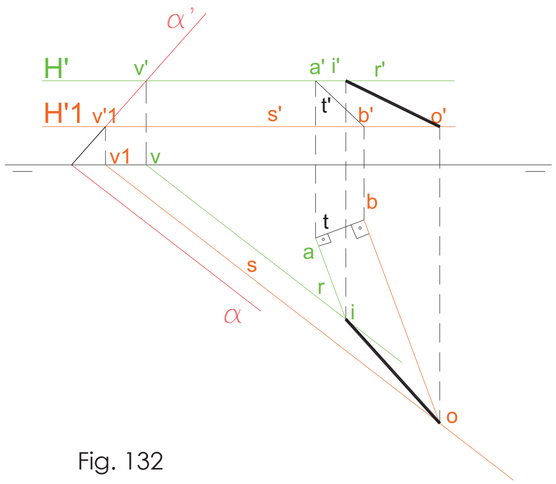


Fig. 132

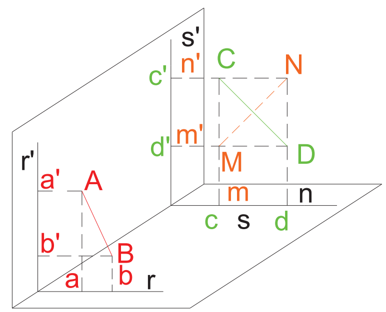


Fig. 133

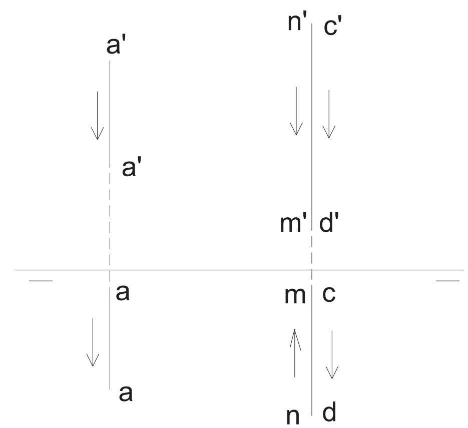


Fig. 134

PARALELISMO ENTRE RECTAS DE PERFIL (fig. 134)

AB y **CD** son rectas de perfil. Como las proyectantes son parlelas, los triángulos **AOB** y **MCD** son semejantes.

de ahí: $\frac{OB}{MD} = \frac{OA}{MC}$ Si **OB** es igual a **a b**,: **OA = a' b'**, y si **MD** es igual a **c d**, **MC = c' d'**; de todo esto resulta que:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'}$$

es decir que: si dos segmentos de perfil son paralelos, sus proyecciones homónimas tienen longitudes proporcionales.

Puede ocurrir que aún verificándose esta proporción, las rectas no sean paralelas como ocurre con la **AB** y **MN** (fig. 133), en la que por ser **c d = m n,** y **c' d' = m' n'**, también se verifica que:

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{mn}{m'n'},$$

y sin embarago **AB** no es paralela a **MN**.

La manera más sencilla de verificar este indeterminación es fijarse en la orientación de las proyecciones de los segmentos **AB** y **CD**. Pueden ser del mismo sentido o contrarios (ambos), pero no los dos al mismo tiempo.

De ahí la regla: **Dos segmentos de perfil son paralelos si además de tener sus proyecciones homónimas longitudes proporcionales, las dos proyecciones de cada segmento tienen el mismo sentido o los los el sentido contrario, que sus homónimos del otro, al leerse aquéllos en sentidos arbitrarios.**

Ejemplo: Dada una recta de perfil **a b–a' b'**, trazar otra paralela a ella y que pase por el punto **C**. (fig. 135): haciendo valer la proporcionalidad: **k c = a b,** y **k' c' = a' b'**, a partir de **K**, tomar segmentos y direcciones iguales.

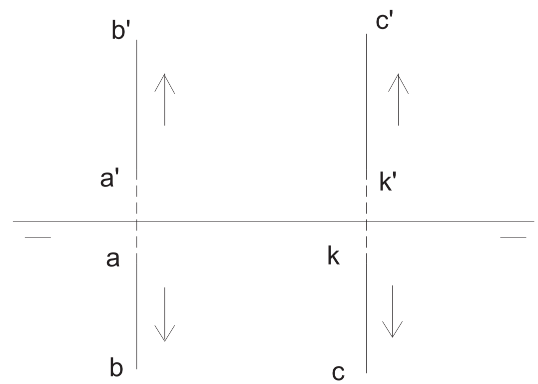


Fig. 135

TERCERA UNIDAD

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

1.- PARALELISMO

Si dos rectas son paralelas en el espacio, sus proyecciones homónimas serán paralelas;

o bien:

Para que dos rectas sean paralelas, sus proyecciones homónimas también lo serán.

Para que dos planos sean paralelos, sus trazas homónimas deben ser paralelas. Se exceptúan los planos paralelos a la línea de tierra.

α y β son paralelos: **r – r'** de β tiene su proyección horizontal paralela a β y por consiguiente a α. Se deduce de esto, que para trazar el plano β paralelo a otro dado α y que pase por el punto **a – a'**, se traza una horizontal **r – r'** donde **r** es paralela a α'. Por la traza vertical **v**', trazar la paralela a α'. (fig. 136 y 137)

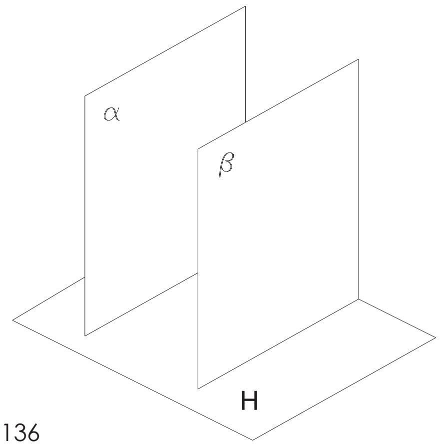


Fig. 136

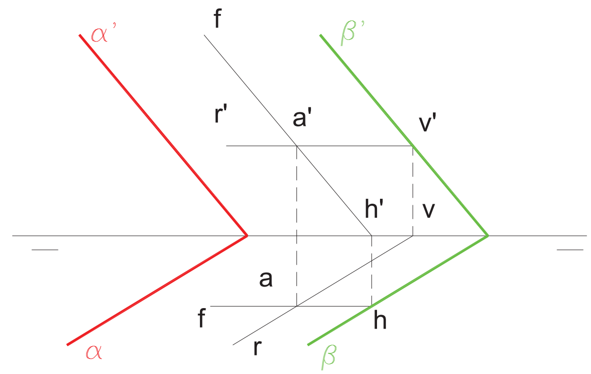


Fig. 137

RECTA PARALELA A UN PLANO: Para que una recta sea paralela a un plano, basta que lo sea a una recta cualquiera del plano.

Existen infinitas soluciones. Para determinarlo, trazar una recta del plano, y por cualquier punto del espacio, pasar una paralela a la recta del plano. (fig. 138)

Su representación en el depurado es como sigue: (fig.139) **Por a–a', trazar una recta paralela al plano:**

1° Trazar un plano cualquiera

2° Ubicar una recta en dicho plano

3° Por el punto dado, trazar una recta paralela a la recta del plano.

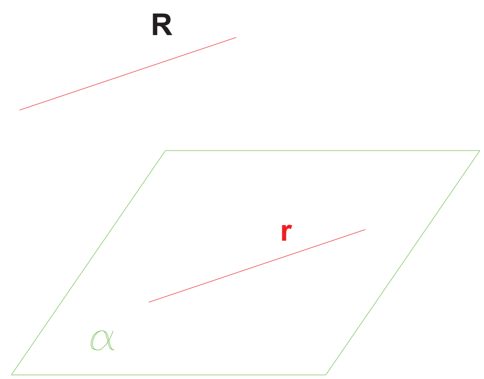


Fig. 138

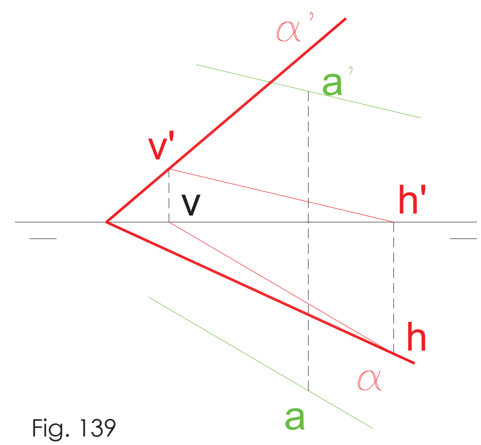


Fig. 139

También puede resolverse trazando por **a–a'** un plano paralelo al α y cualquier recta del segundo plano, será paralela al plano α . (fig. 140)

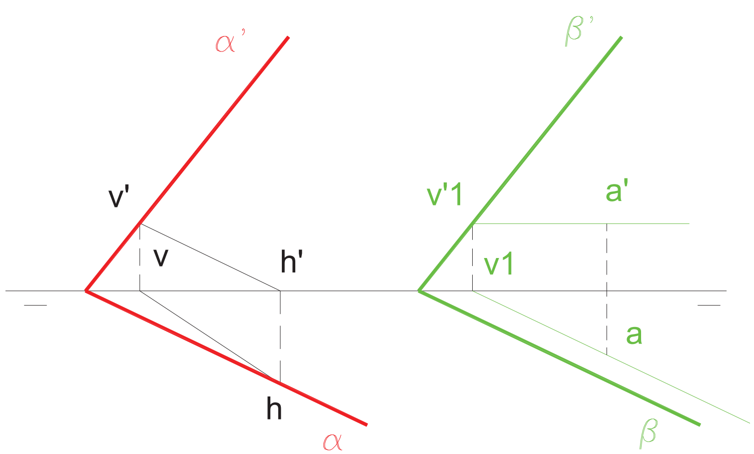


Fig. 140

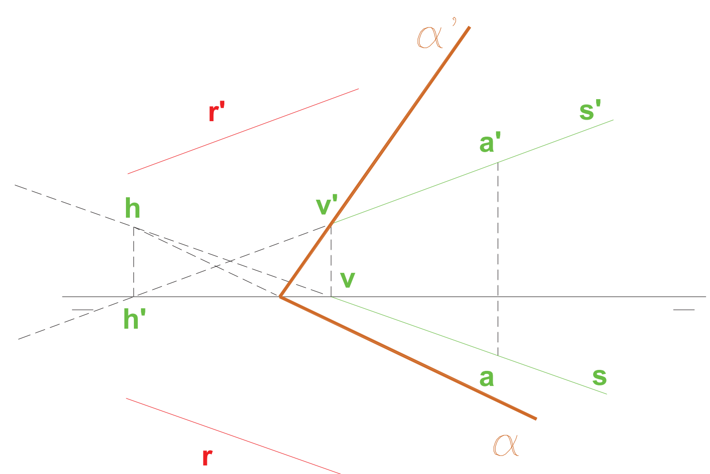


Fig. 141

Para resolver el problema inverso: trazar un plano que pase por el punto dado **a–a'**, y sea paralelo a la recta **r–r'**:

1° Por **a–a'** una paralela a la recta **r–r'** (**s–s'**)
2° Hallar las trazas de dicha recta
3° Cualquier plano que pase por la recta, es solución. (fig. 141)

Recta paralela a un plano: Para que una recta sea paralela a un plano, basta que lo sea a una recta del plano (fig. 142). Para ello trazamos una recta auxiliar **S** del plano; luego por cualquier punto del espacio trazamos una paralela **R** a **S**.

En el depurado:

- Por **a–a'** pasar una recta **R** paralela a S del plano α. En α se traza la recta **s–s'**, y por un punto cualquiera **a–a'** del espacio, pasamos una recta **r–r'** paralela a la del plano (fig. 143)

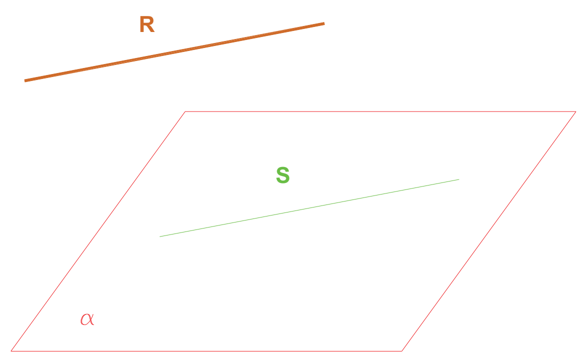


Fig. 142

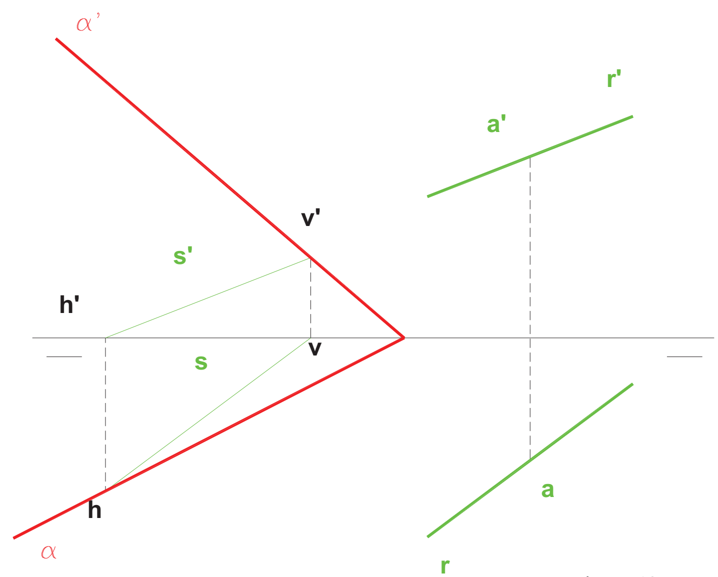


Fig. 143

Para resolver el problema inverso o sea trazar un plano que pase por un punto **a–a'** y sea paralelo a la recta **r–r'**: (fig. 144) Por **a–a'** trazar una paralela a **r–r'** y hallar sus trazas. Cualquier plano que pase por las trazas de la recta, es solución.

2.- PERPENDICULARIDAD

Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todas las rectas contenidas en dicho plano.

R es perpendicular al plano **α**; lo es también a las rectas **A**, **B, C**, del plano (fig. 145)

El inverso dice:

Para que una recta sea perpendicular a un plano, basta que lo sea a dos rectas cualesquiera de ese plano, siempre que éstas no sean paralelas.

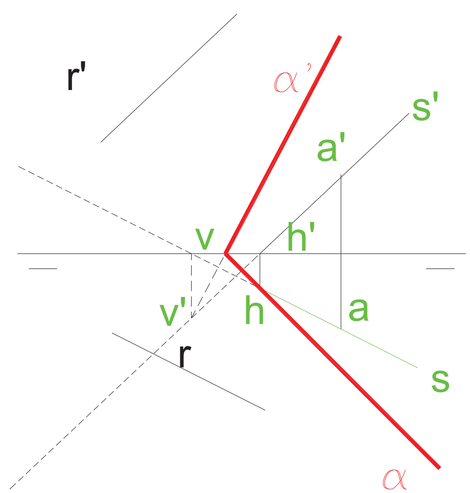


Fig. 144

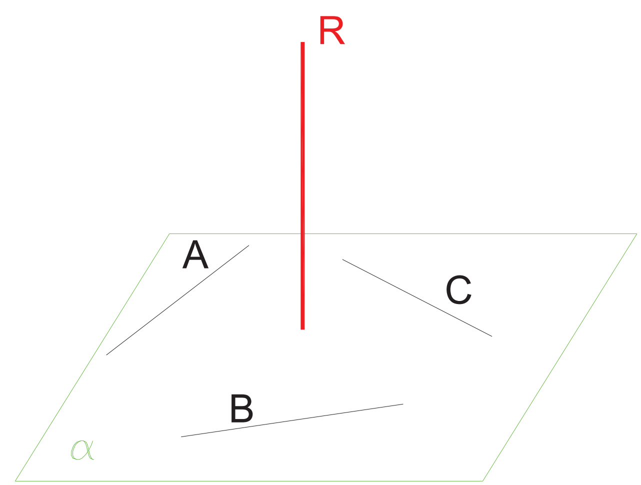


Fig. 145

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES: Si dos rectas R y T son perpendiculares en el espacio, y una de ellas, por ejemplo la R es paralela a un plano α, las proyecciones ortogonales r y t de ambas rectas sobre dicho plano, son también perpendiculares.

El recíproco:

Si las proyecciones ortogonales r y t de dos rectas R y T del espacio, son perpendiculares, y una de ellas por ejemplo la R, es paralela al plano de proyección, ambas rectas R y T, son perpendiculares en el espacio. (fig. 146)

Caso particular: La recta **R** no es paralela al plano, sino que está contenida en él: (fig. 147)

Si una recta T es perpendicular a una recta R cualquiera del plano α, su proyección ortogonal sobre este plano es también perpendicular a R.

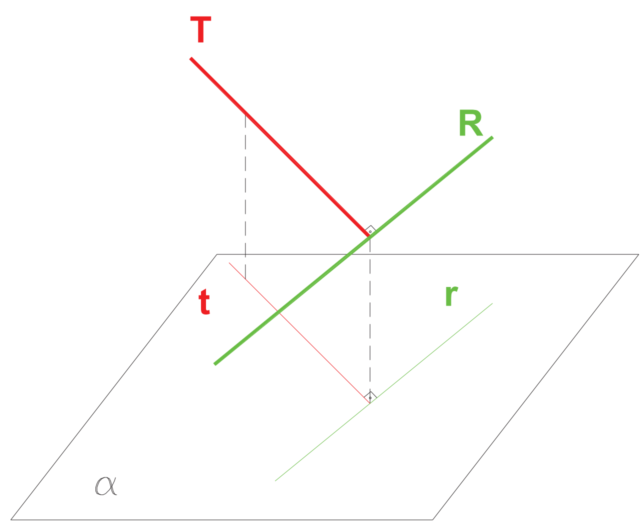


Fig. 146

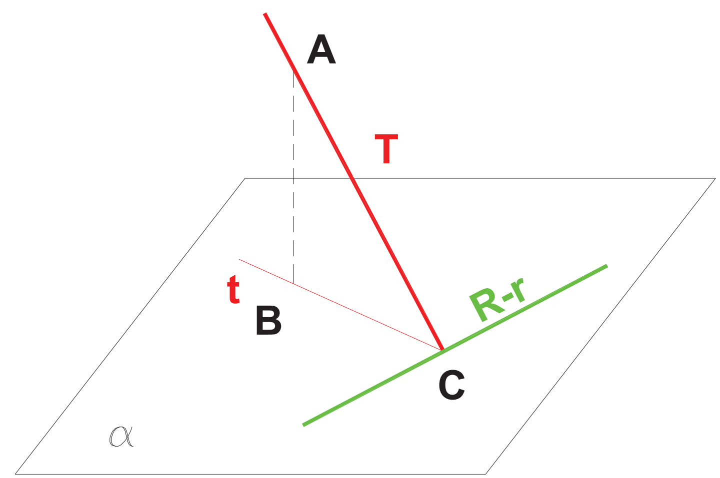


Fig. 147

Recta perpendicular a un plano: (fig. 148) Sea **R** perpendicular al plano α. Si lo es al plano, lo será a todas las rectas de ese plano, y por tanto a **t**, traza con el plano β. Según el teorema de las tres perpendiculares, si **R** es perpendicular a la recta **T** contenida en β, su proyección ortogonal **r** sobre ese plano también será perpendicular a la traza **t**; por tanto:

Si **una recta R es perpendicular a un plano α, la proyección ortogonal r de la recta sobre un segundo plano β, es perpendicular a la traza t de α con dicho plano β.**

Ahora bien, si β es el plano horizontal de proyección, resulta que si **R** es perpendicular a α, su proyección horizontal **r** ha de ser perpendicular a la traza horizontal **t** del plano. El mismo razonamiento se dará para el plano vertical de proyección. De ahí la regla:

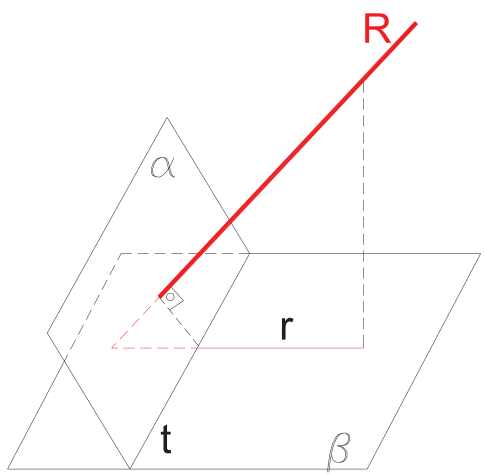


Fig. 148

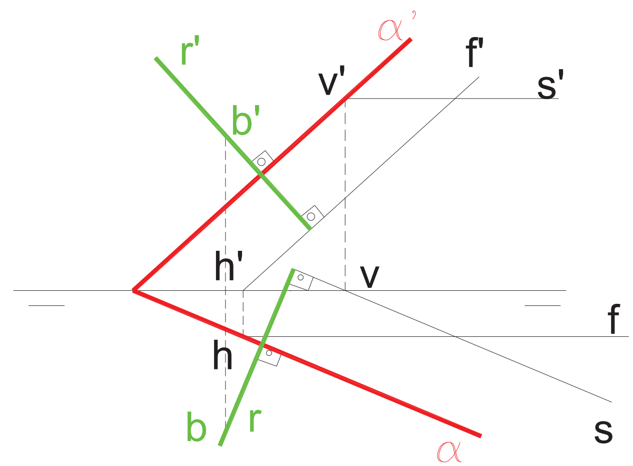


Fig. 149

Para que una recta sea perpendicular a un plano es preciso que las proyecciones de la recta sean perpendiculares a las homónimas del plano.

Si se quiere trazar una recta **r–r'** perpendicular al plano **α**, basta dibujar sus proyecciones perpendiculares a las trazas del plano. (fig. 149)

Nótese que: por ser **r** perpendicular a **α**, lo será a todas las proyecciones horizontales **s** de las horizontales del plano: asimismo **r'** será perpendicular a las proyecciones verticales **f'** de las frontales del plano.

Si por un punto **b–b'** ha de trazarse una perpendicular al plano α, basta trazar por sus proyecciones, perpendiculares a las trazas del plano.

Trazar por un punto un plano perpendicular a una recta: (fig.150)

a–a' es el punto; **r–r'** es la recta. Por **a–a'** trazar una horizontal del plano, **s–s'**, cuya proyección horizontal **s** será perpendicular a **r**; hallar la traza vertical **v–v'** de la recta. Por **v'** una perpendicular a **r'** que será la traza vertical del plano, determinándose la traza horizontal α , paralela a **s.**

PLANO PERPENDICULAR A OTRO:

Para que los planos α y β sean perpendiculares, es preciso que uno de ellos, por ejemplo el β, contenga una recta R perpendicular al plano α. Por esta recta, pueden pasar infinitos planos; por tanto las soluciones serán infinitas. (fig. 151)

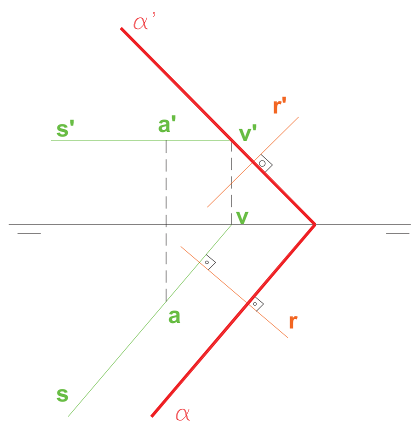


Fig. 150

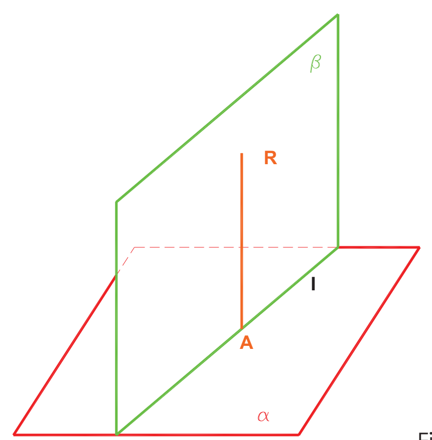


Fig. 151

En el depurado: α'– α es el plano, (fig. 152)

Tazar **r–r'** perpendicular al plano.

Por las trazas de la recta, pasar un plano cualquiera, el β.

Encontrar la recta de intersección entre ambos planos, que es la **i – i'**.

A, es la intersección entre **R** e **I**, coincidente con su traza horizontal. (fig. 152)

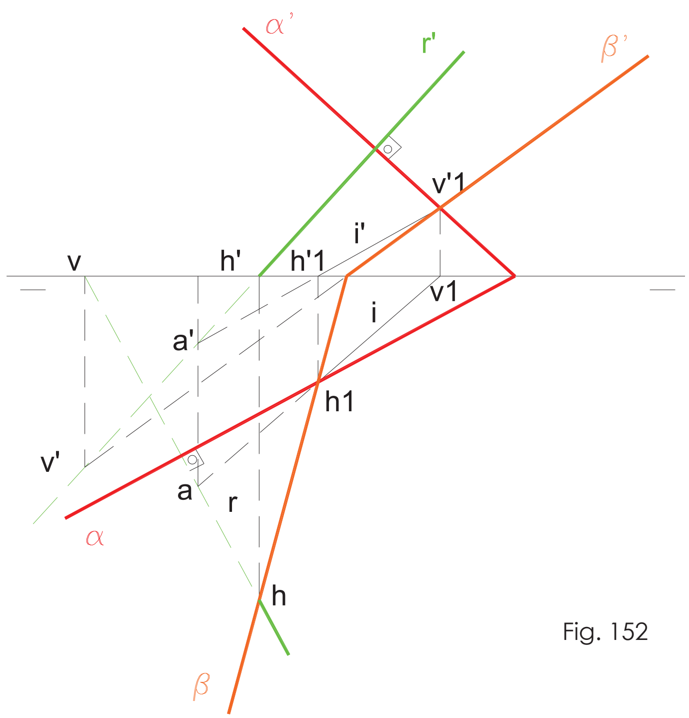


Fig. 152

Plano que pasa por un punto o una recta y es perpendicular a otro plano: (fig. 153 y 154)

Por **a–a'** trazar una perpendicular al plano α , la **r–r'**.

Cualquier plano que pase por **r–r'** será perpendicular al plano α .

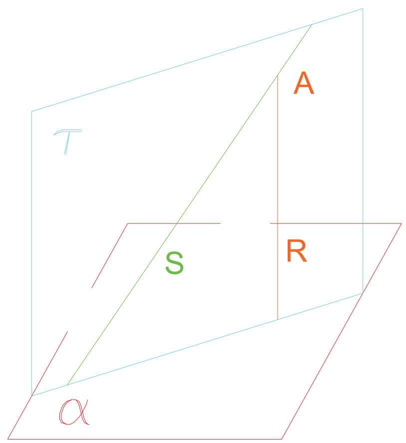


Fig. 153

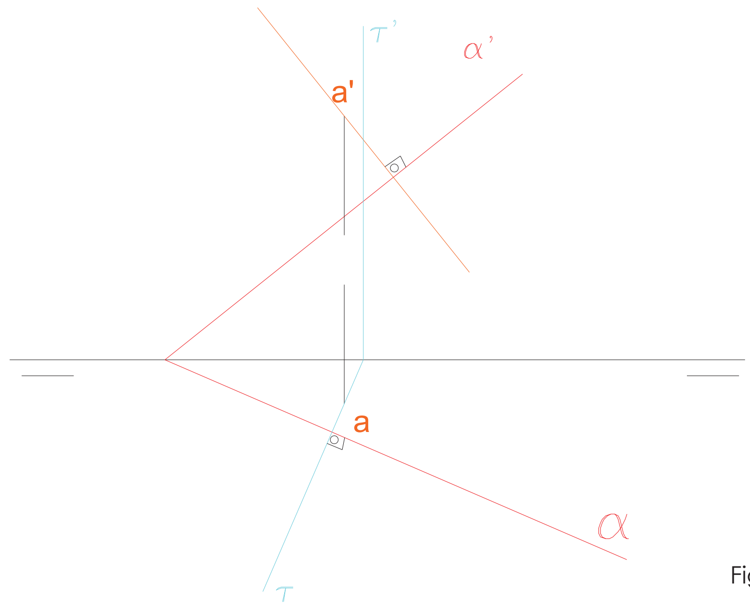


Fig. 154

Uno de los muchos planos podría ser el proyectante **ζ** . Si el plano además de ser perpendicular a **α**, debiera pasar por una recta **S,** (fig. 155) desde el punto **A** pasar una perpendicular a α; **R** y **S** determinan el plano **ζ**, perpendicular a α .

Para ello, por **a–a'**, trazar perpendiculares a α'– α, hallando sus trazas. Encontrar las trazas de **s–s'**; por las trazas de **S** y **R**, se determina el plano β, que será perpendicular a α .

Recta perpendicular a otra: Como se vio en la fig. 145, si se traza un plano cualquiera α**'–** α perpendicular a la recta **R**, cualquier recta del plano le es perpendicular.

En el depurado: α**'–** α es perpendicular a **r–r'**.

La recta s–s' del plano α'– α, es perpendicular a R. (fig. 156)

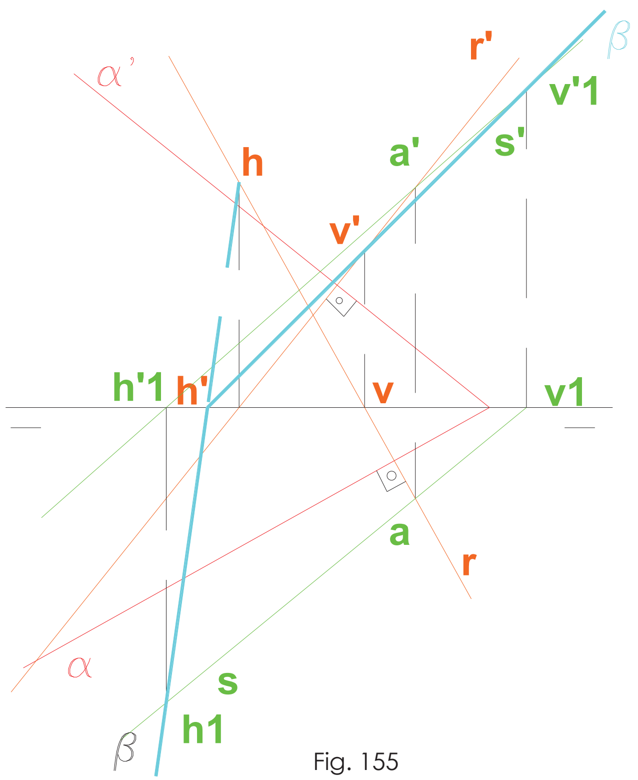


Fig. 155

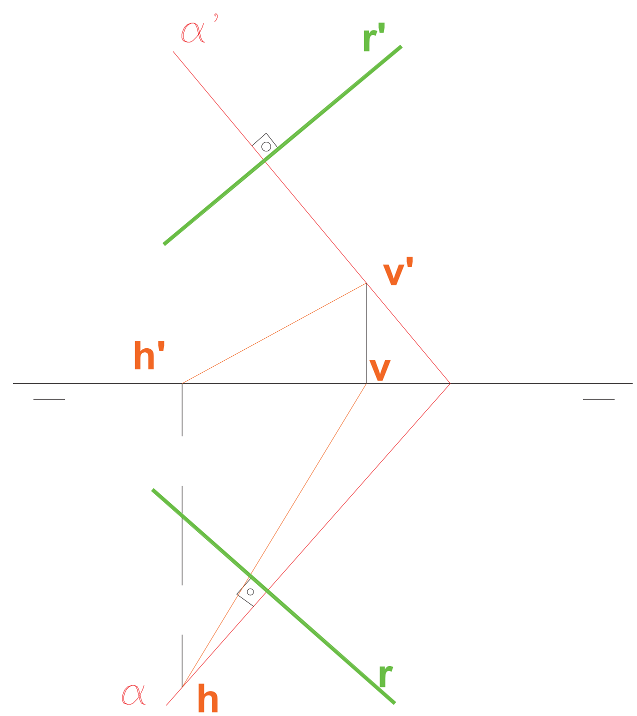


Fig. 156

REGLAS BASICAS EN PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD:

- **Dos rectas paralelas en el espacio, se proyectan paralelas en el depurado.**
- **Dos planos paralelos en el espacio, se proyectan paralelos en el depurado.**
- **Rectas y planos paralelos en el espacio** NO se proyectan paralelos **en el depurado.**

Dos rectas perpendiculares en el espacio no se proyectan perpendiculares en el depurado.

- **Dos planos perpendiculares en el espacio, no se proyectan perpendiculares en el depurado.**
- **Rectas y planos perpendiculares en el espacio, SI se proyectan perpendiculares en el depurado.**

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan: Método General:

Dadas dos rectas en el espacio, existe sólo una recta que sea perpendicular a ambas. Esta es la perpendicular común.

Primer procedimiento: Sean **R** y **S** las rectas que se curzan(fig. 157)

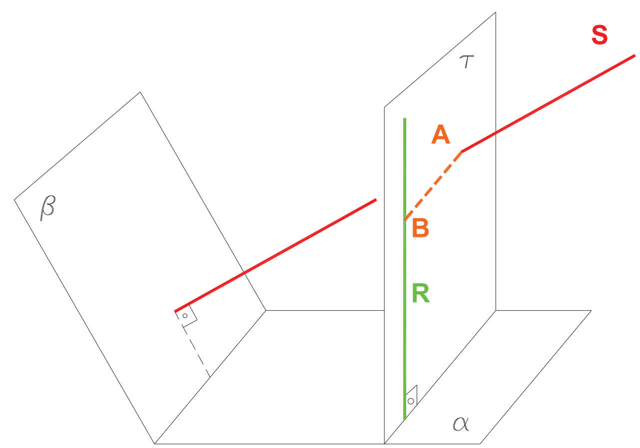


Fig. 157

1° Trazar el plano **α** perpendicular a **R**, y **b** perpendicular a **S**; hallar luego la recta **I**, intersección de **α** y **b**.
2° Trazar el plano **ζ** por una de ellas, en este caso la **R**, y que es paralelo a **I**, encontrando la intersección **A** de **S** con **ζ** .
3° Por **A**, la paralela a I que da **B** en **R**, siendo **AB** la perpendicular común que se busca.

En el depurado: (fig. 158)

1° Datos: **r–r'** y **s–s**
2° Por **r–r'**, un plano perpendicular α , y por **s–s',** el plano **b.**
3° La intersección de α y β da la recta **i–i'.**
4° Por **A** de **R**,una paralela a la que con **R**,nos determina el plano λ**.**
5° Por la recta **S**, pasar un proyectante **ζ**, que al cortarse con **γ** , nos permite encontrar el punto **A1**.
6° Por **a'1–a1**, pasar una paralela a **I**, que corta **a r- r'** en **b–b'**. La unión de **a1–a'1** y **b–b'**, es la solución.

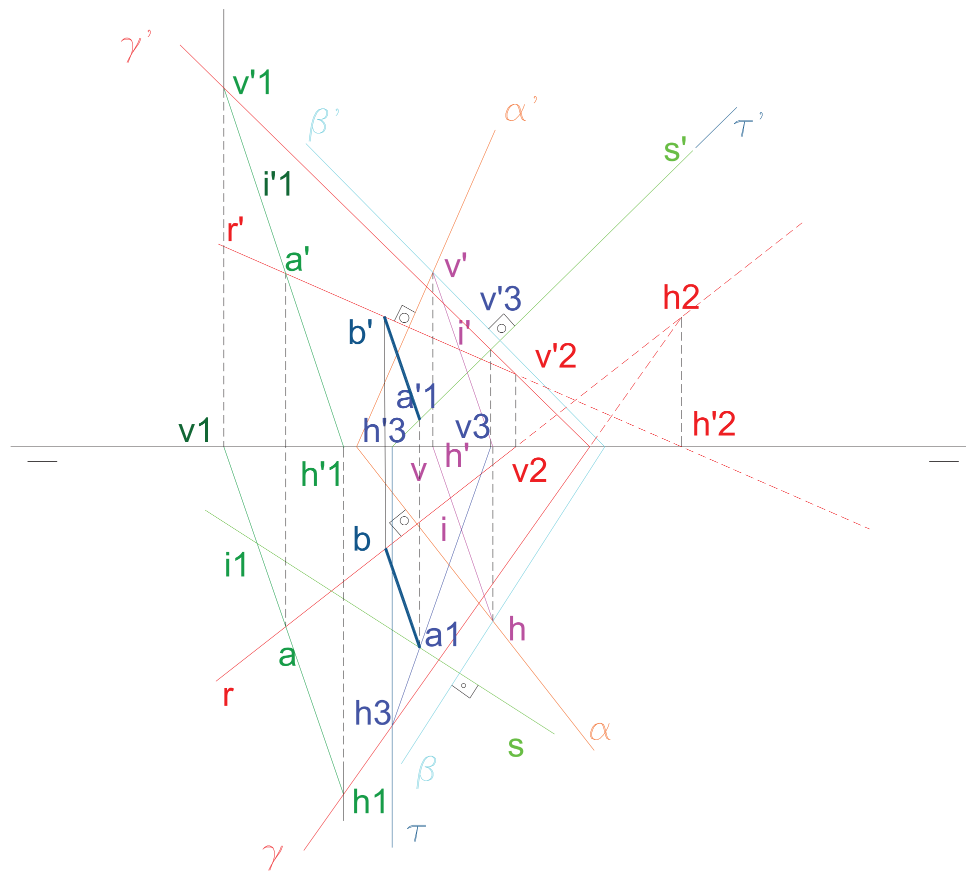


Fig. 158

Segundo procedimiento: (fig. 159)

1° Trazar el plano α perpendicular a una de ellas, por ejemplo la **R**, que corta al plano en **C**.
2° Encontrar la proyección de **S** sobre **α** en **T**.
3° Desde **C**, una perpendicular a **T** en **D**.
4° Por **D** trazar una paralela a **R**, que corta a en **A**.
5° Por **A** una paralela a **CD** hasta que corte a **R** en **E**.

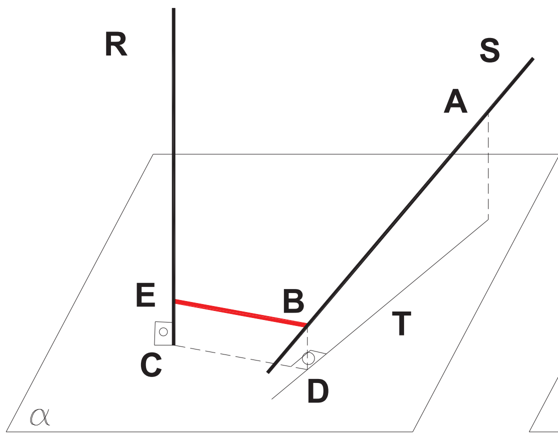


Fig. 159

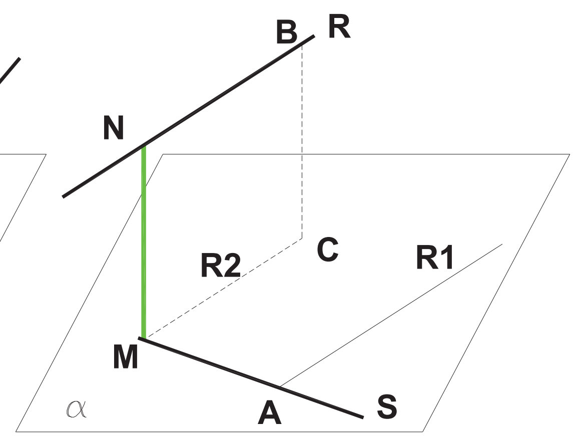


Fig. 160

Solución en el depurado: (fig. 161)

1° Trazar **α** perpendicular a **R**.
2° Mediante un proyectante **ζ** por **R**, determinar la intersección de ésta con **ζ** en **C**.
3° Por un punto **A** de **S**, perpendicular α (h2–v2), que con la **S** (h1–v1) determinan el plano β .
4° La intersección de α y β da la recta **T,** proyección de **S** sobre α .

5° Desde **C** perpendicular a β, hasta cortar **T** en el punto **D**.
6° Por **D** paralela a **R**, hasta encontrar **S**, determinando el punto **A**.
7° Desde **A**, paralela a **CD**, hasta encontrar determinando. La recta **AB** es la solución.

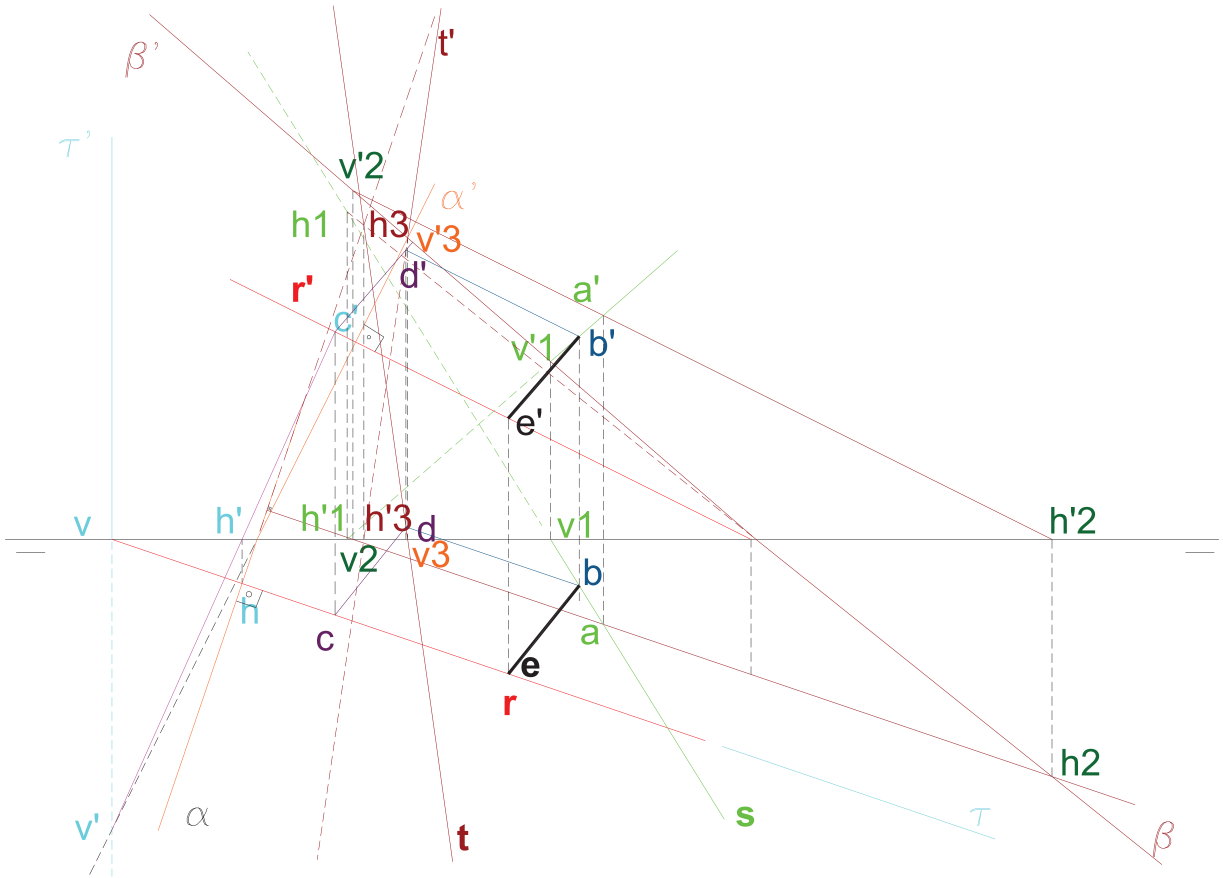


Fig. 161

Tercer procedimiento: (fig. 160)

1° Por un punto cualquiera **A** de **S**, trazar una parlalela **R1** a **R,** y hallar el plano α formado por **S** y **R1**, que será paralelo a **R**.
2° Proyectar ortogonalmente **R** sobre α . Para ello, por un punto **B** de **R**, trazar una perpendicular **BC** a **α** que lo corta en **C.** La paralela **R2** a **R** por **C**, es la proyección buscada.
3° Determinar el punto de intersección **M** de con la proyección **R2** de **R** y trazar por él la perpendicular al pl ano (paralela a BC) que cortará a **R** en **N. MN** es la perpendicular común.

De los tres procedimientos explicados, el tercero es el más empleado.

Solución en el depurado: (fig. 162)

1° Por **a–a'** de **S,** trazar una paralela a **R** y da **r1–r1',** determinando el plano **α** por las trazas de **r1–r1'** y **s–s'.**
2° Determinar un punto **b–b'** en **r–r'**; por **b** pasar un plano proyectante **ζ** que se corta con α según la recta **o–o'**. Por **b'**, una perpendicular a α, obteniendo el punto **c–c'**.
3° Por **c–c'**, una paralela a **r–r'** que corta a **s–s'** en **m–m'**. Por este último, una paralela a **bc–b'c'**, y hallamos en **r–r'** el punto **n–n'**. Uniendo **m–m'** con **n–n'**, Tenemos la respuesta.

Podemos considerar como caso especial aquél en el que una de las rectas es de punta. (fig. 163)

Aplicando el segundo procedimiento, el plano α es el vertical de proyección y la proyección **t** de **s,** es la recta **t–t'** confundida con la **s**' de la recta.

Trazamos la perpendicular **c' d'–cd**, a **t–t'** y por el punto de intersección de ambas, **d–d'**, la paralela **da–d'a'** a **r–r'** que será otra recta de punta que cortará a **s–s'** en **a–a'**.

Trazando finalmente por **a–a'** la paralela **ab–a'b'** a **cd–c'd'**, cortará en **b–b'** a **r–r'**, siendo esta última recta **ab–a'b'** la perpendicular común buscada.

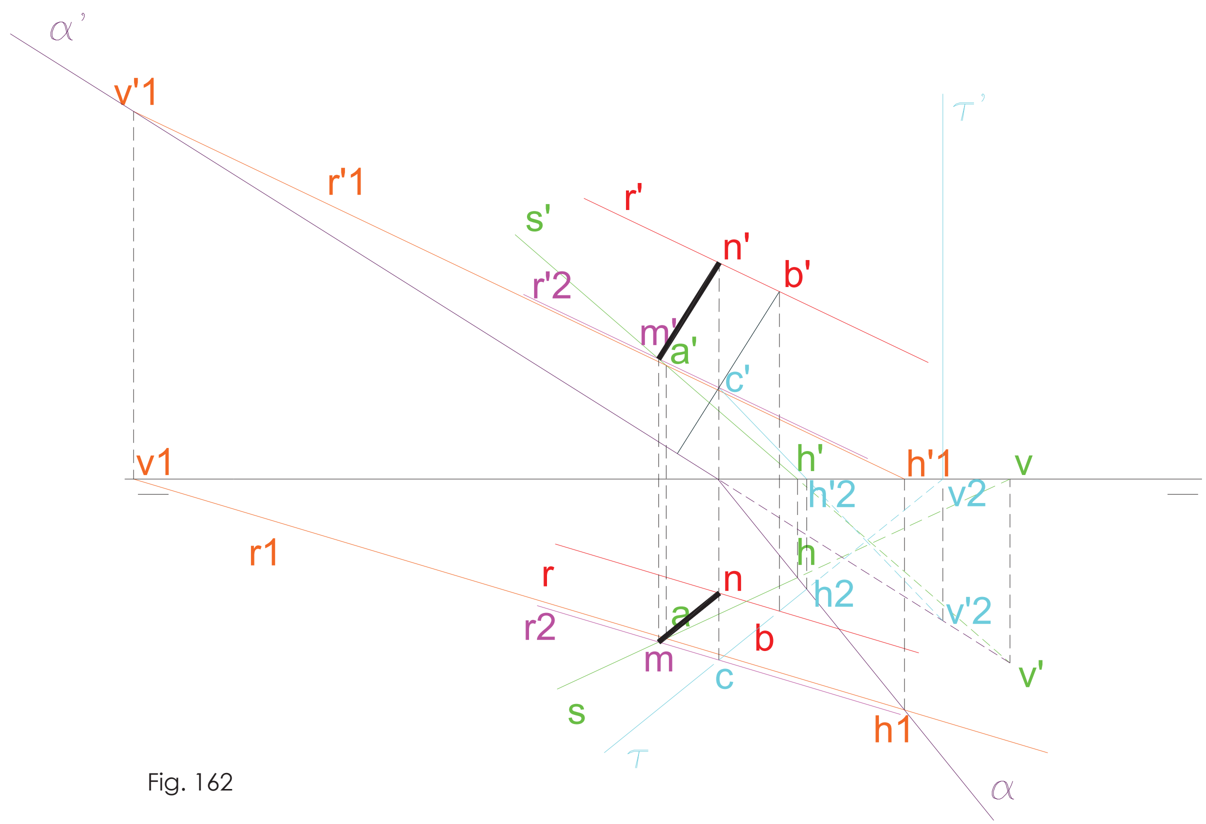


Fig. 162

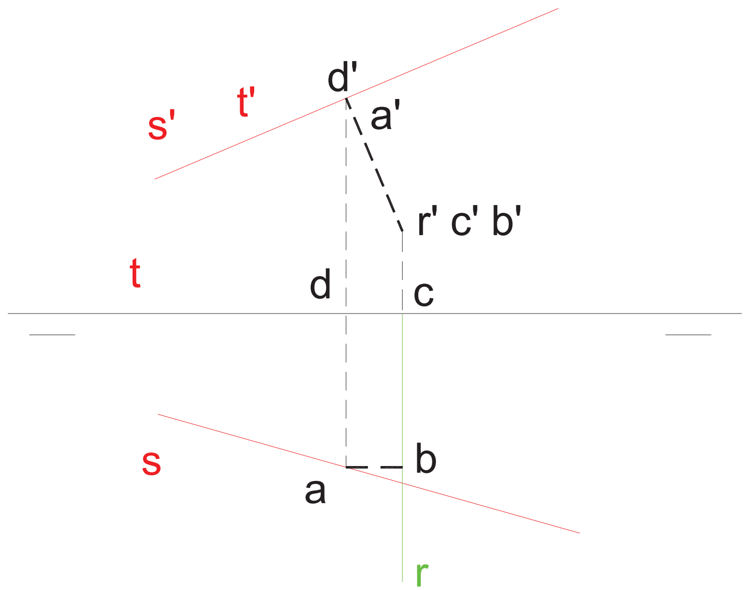


Fig. 163

CUARTA UNIDAD

1.- DISTANCIAS

Distancia entre dos puntos: Como se sabe, la distancia entre dos puntos es la recta que los une.

Proyectamos **AB** sobre α en **ab**. (fig. 164) Por **A** la paralela **AC** a **ab**, hasta encontrar a **Bb** en **C**, formando el triángulo rectángulo **ABC** en el que **AB** es la hipotenusa. Los catetos nos son conocidos puesto que:

AC = ab; **BC = Bb–bC = Bb–Aa**, es decir que un cateto es la proyección horizontal del segundo segmento sobre el plano y el otro, la diferencia de las proyectantes de **B** y **A**. Ahora bien, si **α** es unode los planos de proyección, tenemos la regla: **La verdadera magnitud de un segmento AB dado, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: uno, la proyección horizontal del segmento, y el otro, la diferencia de las cotas de A y B; o también, un cateto es la proyección vertical, y el otro la diferencia de alejamientos de ambos puntos.**

Aplicando la regla al segmento **ab–a'b'**, (fig. 165) construímos sobre **ab** un triángulo rectángulo en el que el otro cateto es la diferencia **d** entre las cotas de **A** y **B** medidos sobre la proyección vertical. La hipotenusa del triángulo nos dará la distancia **D** entre ambos puntos.

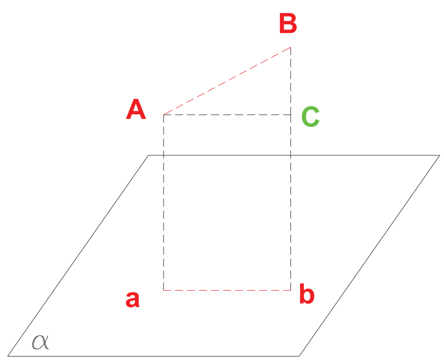


Fig. 164

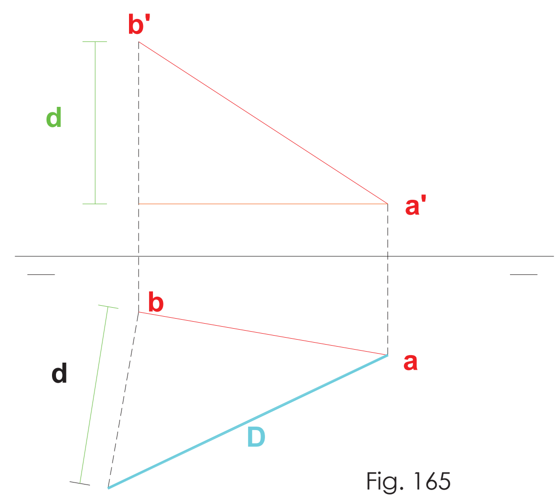


Fig. 165

Distancia de un punto a un plano: La distancia de un punto a un plano se mide por la longitud **D** que existe entre el punto dado **A** y el pie de la perpendicular, **B**, al plano desde el punto **A**. (fig. 166)

Según esto, para hallar la distancia de un punto **a–a'** al plano **α** se hacen las siguientes construcciones: (fig. 167)

1° Por **a–a'**, trazar la perpendicular **ab–a'b'** al plano α.

2° Hallar la intersección **b–b'** de la recta **AB** con el plano α'**–** α, auxiliándonos por un proyectante horizontal que pase por la recta y que corta al plano según la recta **i–i'**, la que nos sirve para determinar la distancia **ab–a'b'**.

3° Si se pidiera la distancia en verdadera magnitud, hacemos como se indicara líneas arriba.

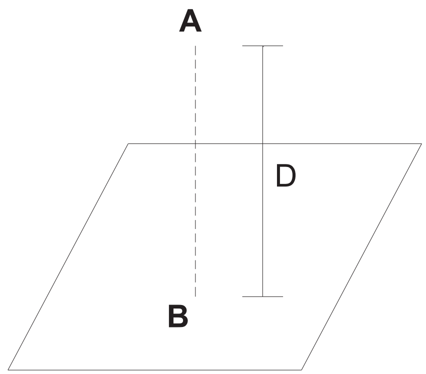


Fig. 166

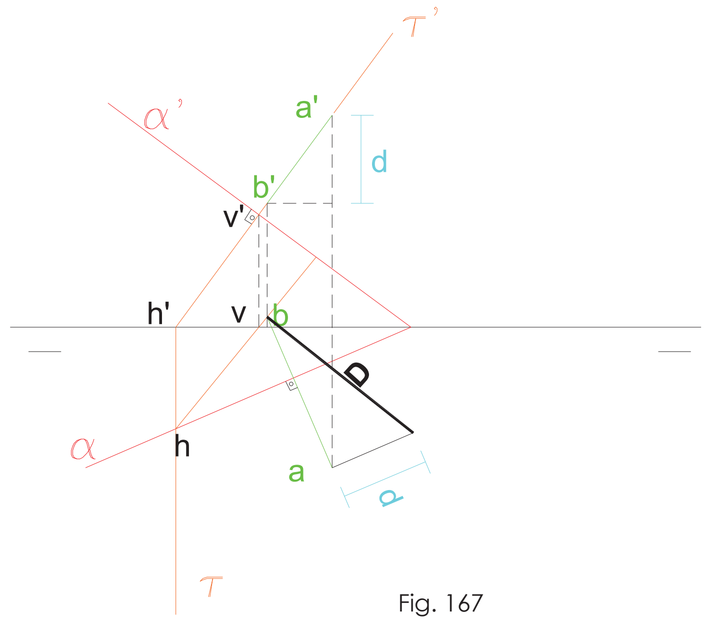


Fig. 167

Distancia de un punto a una recta: (fig. 168) Para realizar esta operación, seguimos los pasos siguientes:

1° Plano α perpendicular a **R**.

2° Con la recta horizontal **s–s'**, contenemos al punto **A** en el plano **α** .

3° Por la recta **r–r'**, un proyectante vertical.

4° Encontrar la intersección de α y **ζ** que es la recta **i–i'**.

5° Desde **a–a'** bajamos la perpendicular a **r–r'** obteniendo el punto **b–b'**. La recta **AB** es la distancia pedida. (fig. 169)

Para encontrar la verdadera magnitud, pasar por **b’** una paralela a LT que nos dará el segmento a llevar a la proyección horizontal, para trazar el triángulo consabido.

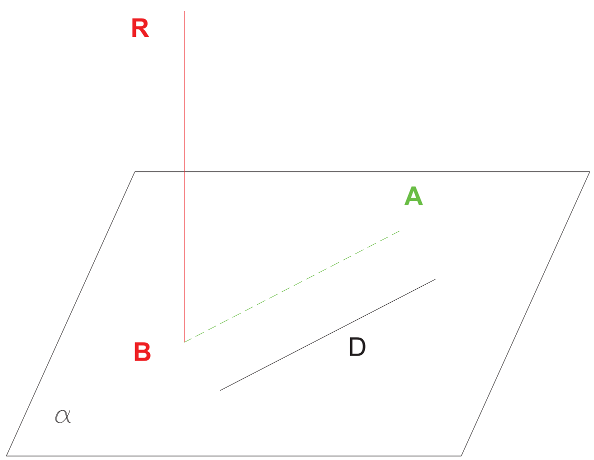


Fig. 168

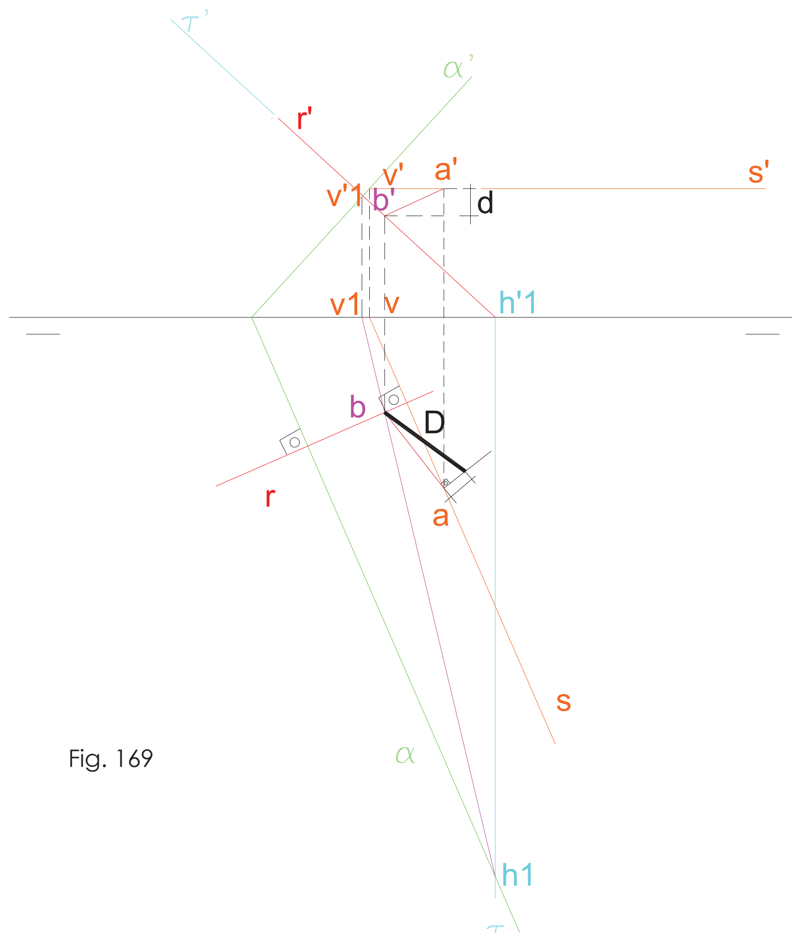


Fig. 169

Distancia entre rectas paralelas: (fig. 170) La distancia entre las paralelas **R** y **S**, es la perpendicular común a ambas, **AD**, que une **A** con **B** resultando de pasar un plano perpendicular a ambas.

En el depurado los pasos a seguir son: (fig. 171)

1° Las rectas son **r–r’** y **s–s’**.

2° Trazar un plano α perpendicular a ambas rectas.

3° Por las rectas pasar planos proyectantes β y γ, obteniendo los puntos **A** y **B**.

4° La unión de ambos puntos encontrados nos da la distancia entre ambas rectas.

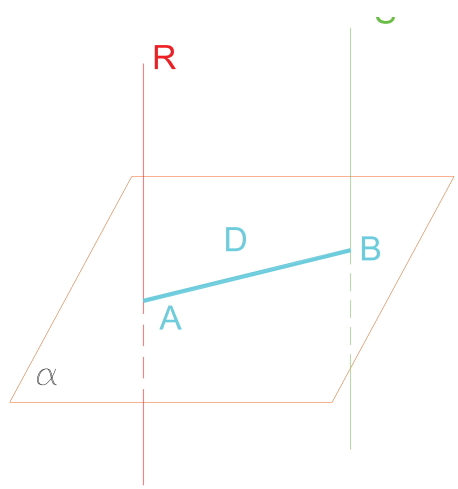


Fig. 170

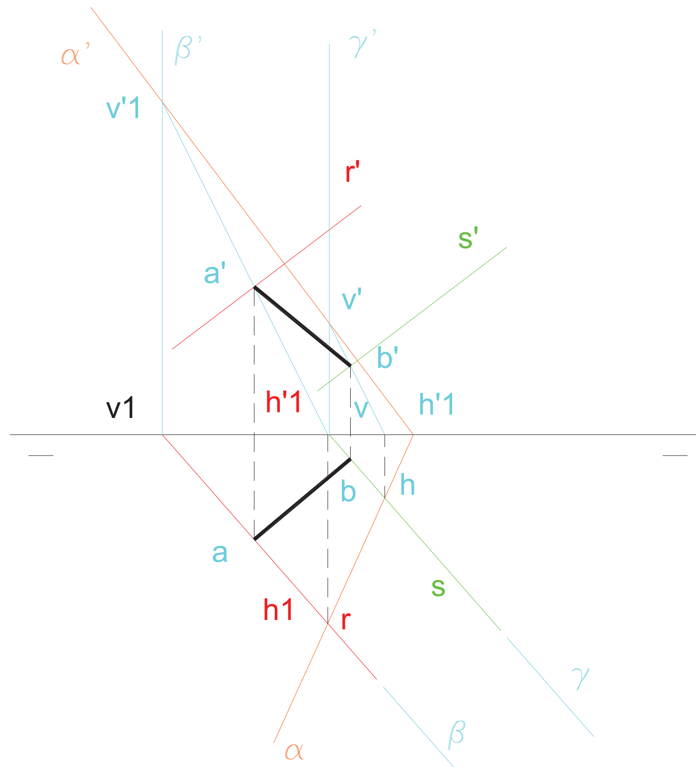


Fig. 171

Distancia entre planos paralelos: (fig. 172) Es el segmento **AB** de una perpendicular a ambos planos. En el depurado basta trazar una recta cualquiera **r–r'** perpendicular a ambos planos; por medio de un plano proyectante cualquiera que pase por ella, hallar la recta de intersección entre los planos paralelos y el proyectante: estos pasos se demuestran en la figura 173.

1° Una recta **r–r'** perpendicular a ambos planos.

2° Un proyectante **ζ** horizontal por la recta **r–r'**.

3° Encontrar la intersección de α y β con **ζ**.

4° La unión de los puntos **A** y **B**, nos determinará la distancia buscada.

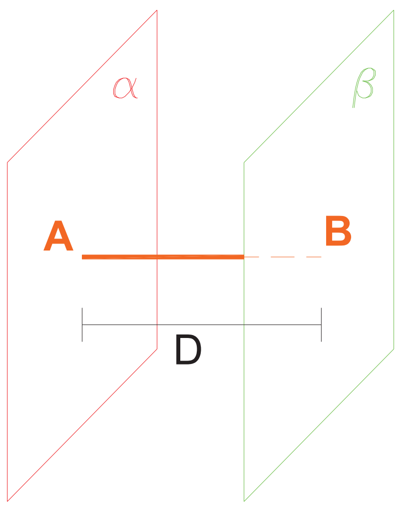


Fig. 172

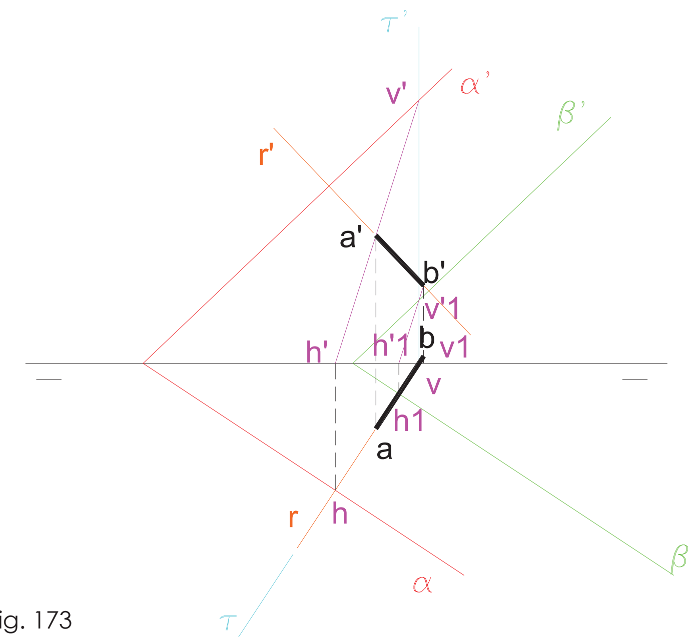


Fig. 173

Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan: (fig. 174)

Basta hallar la perpendicular común **MN** mediante cualquiera de los procedimientos ya sabidos. En el caso gráfico presente, será la recta **MN**. Pero como **BC** es la paralela a **MN** y perpendicular de **B** al plano α**'–** α, se simplificará notablemente con hallar la perpendicular de una recta a un plano que pase por la otra.

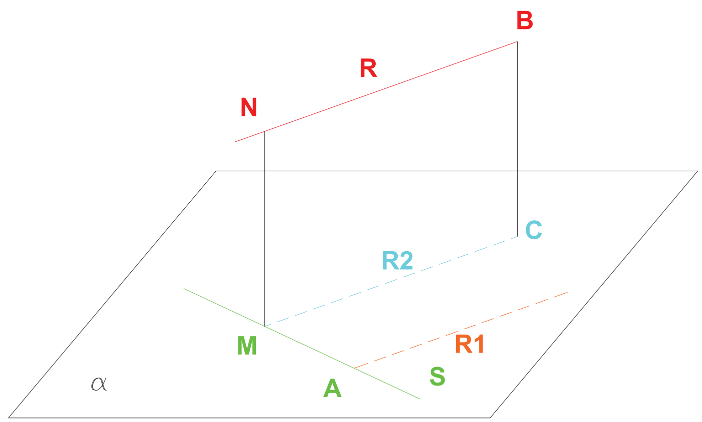


Fig. 174

EJERCICIOS

1.- Distancia de un punto que se encuentre en el primer cuadrante, a una recta. (fig. d1)

- Sea la recta R (r'–r), con trazas v' y h.
- Se trata de encontrar la distancia que hay entre el punto A (a'–a) y dicha recta.
- La distancia que hay entre dos elementos cualesquiera, es la perpendicular que separa a ambos. Es decir que se trata de encontrar la recta que desde el punto A, sea perpendicular a R.

- Como entre rectas no hay relación directa de perpendicularidad, (en el depurado), hay que acudir a una de las rectas auxiliares, en este caso una horizontal, cuya proyección no paralela a la línea de tierra, sea perpendicular desde a, a r, pasando por a' la proyección vertical r'. La traza vertical de esta recta es la v'1.

- Ahora sí podremos pasar el plano perpendicular a la recta R, y que pase por el punto A, que es desde donde se podrá trazar la perpendicular o distancia pedida en el presente ejercicio; este plano es el α**'–** α, cuya traza vertical pasará por v'1, traza vertical de la recta auxiliar que pasa por el punto A, perpendicular a r', desde cuya intersección con la línea de tierra, se pasará la traza horizontal, perpendicular a la proyección horizontal r de la recta.

- Seguidamente se debe encontrar la intersección de la recta R con el plano, para lo que nos auxiliamos de un plano proyectante vertical que pase por la recta, procedimiento este que nos permite encontrar el punto B, donde la recta corta al plano.

- La unión de los puntos A y B, nos dará la distancia pedida.

- Para encontrar la verdadera magnitud de esta distancia, se procede por los métodos aplicables al efecto, esto es mediante la triangulación rectangular, para lo que escogemos la proyección vertical del segmento (d'), trazando un ángulo recto sobre el vértice b'.

- Sobre este segundo cateto, llevamos la diferencia de alejamientos entre los puntos a y b (segmento pq), cuyo extremo, al unirse con a' nos dará la distancia pedida, que en el presente caso es de 41 mm.

2.- Encontrar la distancia que hay desde un punto que se encuentre en el segundo cuadrante, a una recta dada. (fig. d2)

- Los procedimientos a seguir son los mismos que en el ejercicio anterior, con la salvedad de que para encontrar el punto B (b–b'), al no cortarse las trazas horizontales τ y β**,** debemos acudir al auxilio de un plano frontal que al hacerlo según las rectas I1 e I2, determinan el punto O (o'–o), el que unido a la traza vertical de la recta R (v'), permite obtener precisamente la proyección vertical b', y posteriormente la horizontal b.

- Lo demás, es decir la verdadera magnitud de la distancia, se obtiene siguiendo los pasos del anterior ejercicio.

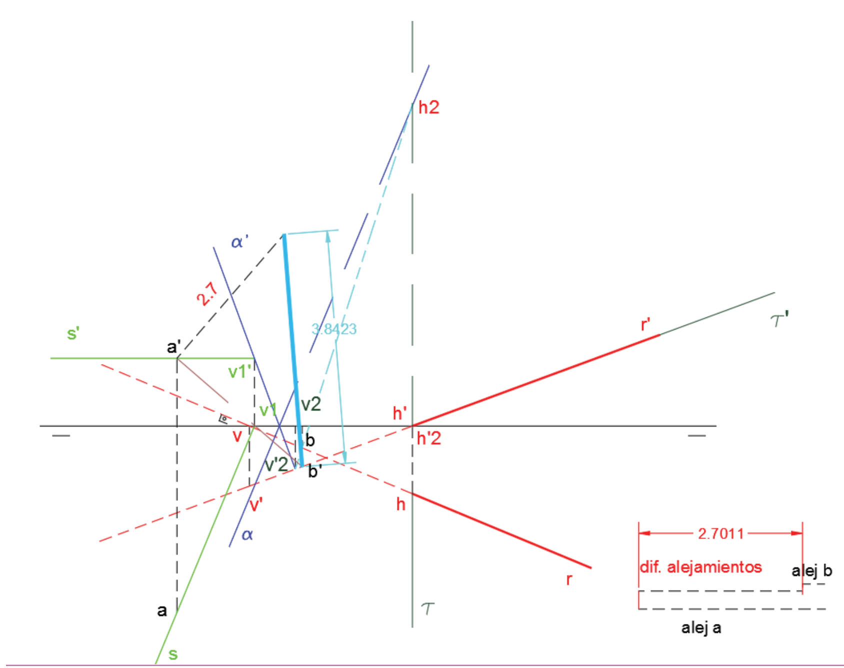


Fig. d1

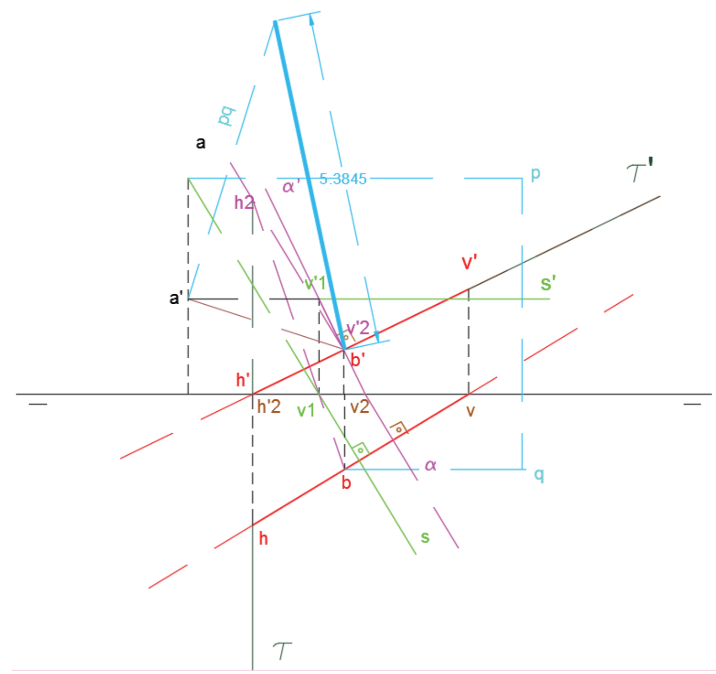


Fig. d2

3.- Encontrar la distancia de un punto que se encuentre en el tercer cuadrante, a una recta oblicua. (fig.d3)

- Se trata del punto A, que por estar en el tercer cuadrante, tiene su proyección horizontal **a**, sobre la línea de tierra, y la vertical **a',** debajo de ella, que se encuentra a una distancia a encontrar , de la recta T con trazas v' y h.

- Debemos pasar una recta auxiliar por el punto A, que será una frontal u horizontal, cuyas proyecciones no paralelas a la línea de tierra se ven en verdadera magnitud; en el presente caso se trata de una frontal cuya proyección vertical por a', será perpendicular a la proyección vertical t' de T. (Esto por cuanto no existe perpendiculararidad directa entre rectas).

- Seguidamente trazaremos un plano perpendicular a la recta T, para lo cual, por la traza horizontal h1 de la frontal auxiliar, pasará la traza horizontal α del plano, perpendicular a la proyección horizontal de la frontal, para desde su intersección con la línea de tierra, tomar la traza α‘ del plano, paralela, a la proyección vertical de la frontal.

- Se encuentra ahora la intersección entre la recta T y el plano α ; para lo que como se sabe debe utilizarse un plano proyectante por T; en este caso se trata de uno horizontal, que por la recta I, intersección entre ambos planos, determina el punto buscado B (b–b').

- La unión de A con B, nos dará la distancia buscada, que al aplicársele el método de la triangulación ya conocida, determina su verdadera magnitud .

4.- Hallar la distancia entre un punto que se encuentra en el cuarto cuadrante y una recta R (r'–r) con trazas v' y h (va del primero al tercer cuadrante, pasando por el segundo). Fig. d4

- El punto que se encuentra en el cuarto cuadrante, es el A (a'–a), y la recta, es la determinada en el enunciado.

- Por los procedimientos enunciados en el ejercicio anterior, (utilizando la recta auxiliar horizontal, f'–f , encontramos que la distancia es el segmento determinado por los puntos D y B.

5.- Encontrar la distancia de un punto en el cuarto cuadrante, a una recta con trazas v'–h, y que va del primer cuadrante al tercero, pasando por el segundo.

- Por ser un ejercicio similar al anterior, pero con distintos datos, los procedimientos para su solución, son los mismos, por lo tanto basta seguir los mismos pasos que se utilizaron en aquél.

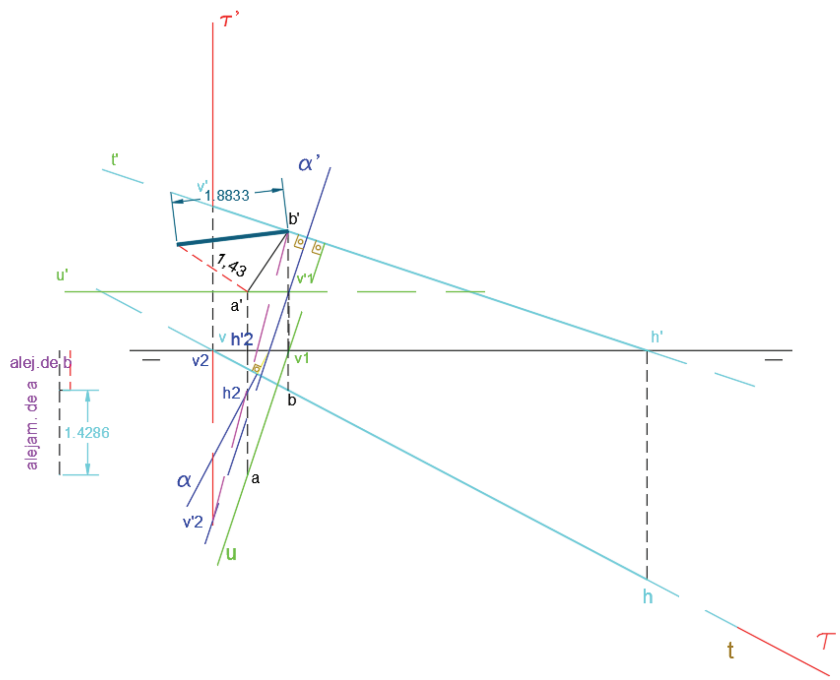


Fig. d3

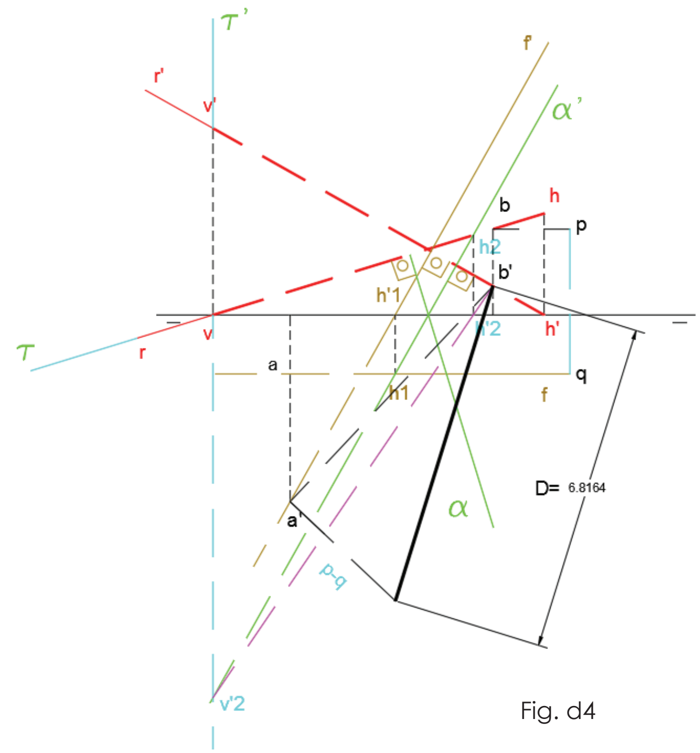


Fig. d4

2.-ABATIMIENTOS

Abatir es girar un plano α sobre otro β alrededor de su traza **E** con α hasta hacerlo coincidir con él. El eje se llama **charnela.** (fig. 175)

Se abate un plano, no un punto o una recta. Por eso cuando hay que abatir, uno se auxilia de un plano que es generalmente un proyectante.

En todo abatimiento hay que especificar:

- qué se abate
- cuál es la charnela
- el sentido del giro

El abatimiento es el método más usado para medir ángulos, distancias o determinar verdaderas magnitudes.

Abatimiento de un punto: (fig. 175) **A**, es el punto del plano α que al abatirlo sobre β toma las posiciones **A'a y Aa**. Al girar **A**, lo hace sobre un plano perpendicular a **E**. Faltaría conocer la distancia **d** a que están los puntos **A'a** y **Aa** de **E**; **d**, es la hipotenusa del triángulo **Aam** en que los catetos son conocidos, puesto que **am** es el alejamiento y **Aa** es la cota.

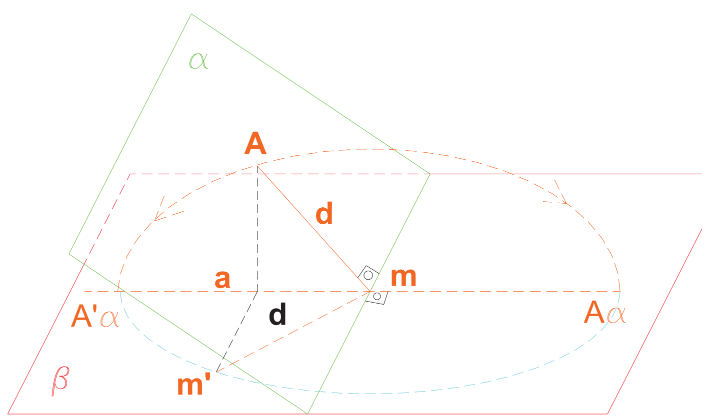


Fig. 75

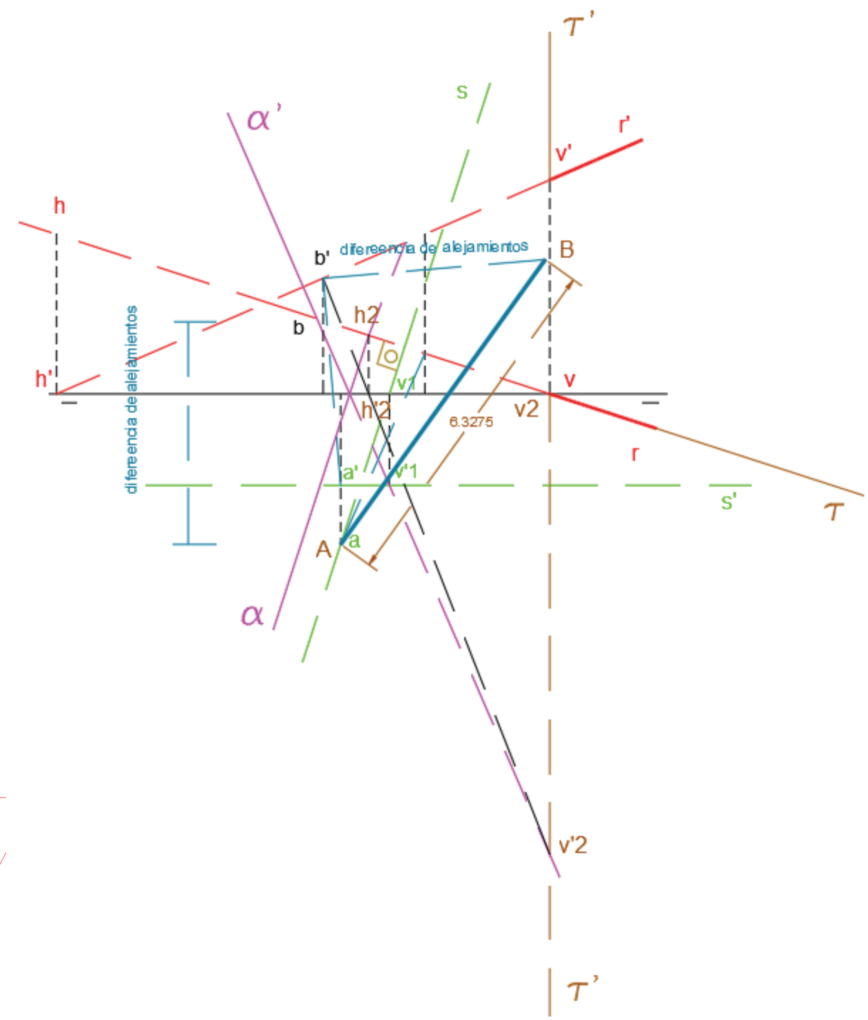


Fig. d5

Suponiendo pues que β es el horizontal de proyección se deduce la regla:

Para abatir un punto A sobre el plano horizontal β , se traza desde su proyección horizontal a, la perpendicular am y la paralela am' a la traza horizontal del plano o charnela. Sobre la paralela, a partir de a, se lleva un segmento igual a la cota del punto (am' = Aa) y se traza con centro en la intersección m de la perpendicular con la traza y radio mm', un arco que cortará a la perpendicular citada, en dos puntos Aa y A'a que son los abatimientos pedidos.

Aplicación al sistema diédrico: La regla en el sistema diédrico será: (fig. 176)

Para abatir un punto sobre el plano horizontal, se traza desde la proyección horizontal a, la paralela y la perpendicular a la traza horizontal del plano que contiene al punto; sobre la paralela, y a partir de a, se lleva un segmento igual a la distancia desde la otra proyección a la línea de tierra y con centro en el punto de intersección de la perpendicular con la traza, y radio, la distancia de este último al extremo del segmento, se traza un arco que cortará a la perpendicular citada en dos puntos que son los abatimientos pedidos.

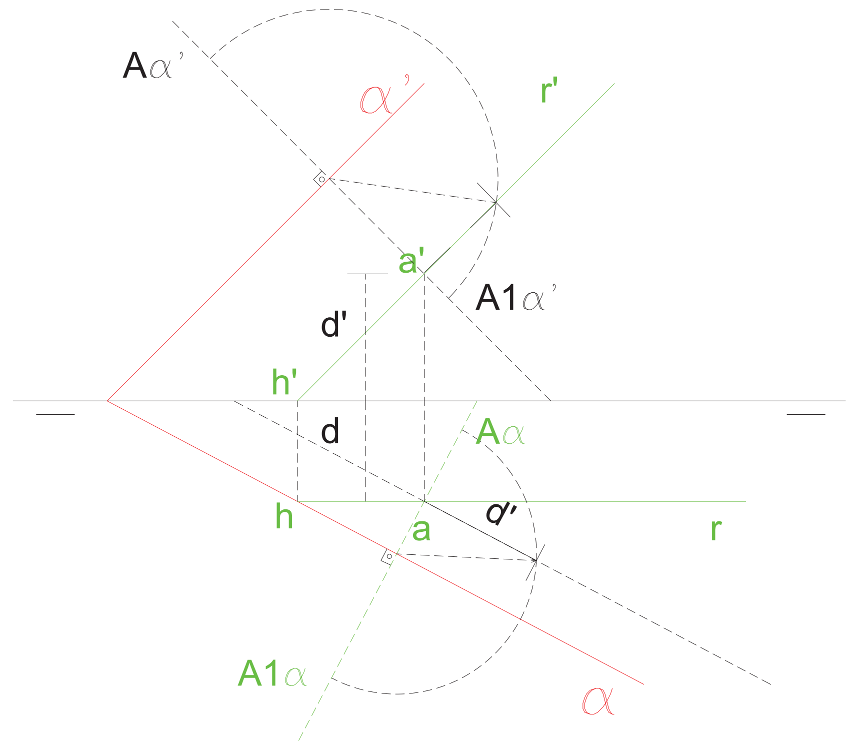


Fig. 176

A veces no se usan los planos de proyección para abatir, sino otro paralelo a ellos, por ejemplo el horizontal. Es el caso de la figura 177:

- **a–a'** pertenece al plano α y se lo abate sobre el paralelo **H'**.

- La charnela es la recta de intersección entre **H'** y α . El centro de la circunferencia es **m**.

- Sobre la paralela se toma **k-a'** = **an** y no **oa'**.

El punto se abatirá sobre **A'h** y **Ah.**

Los puntos abatidos se designan con mayúsculas afectadas por el subíndice de la charnela.

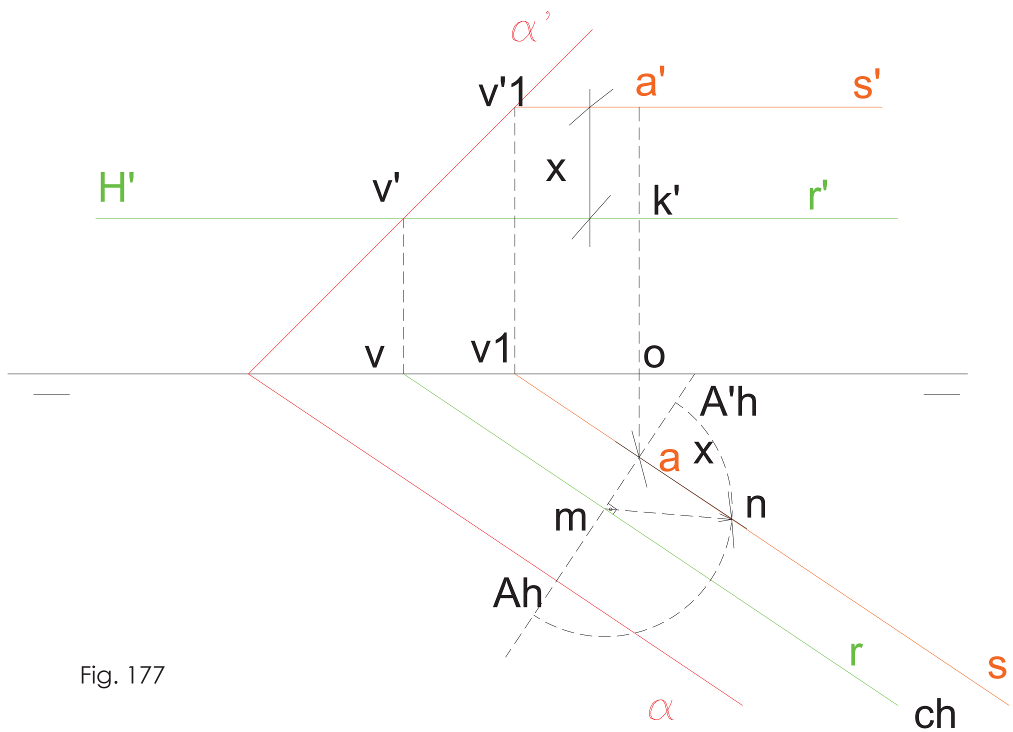


Fig. 177

Abatimiento de una recta: Consiste en abatir dos puntos cualesquiera, aunque uno de ellos se procurará sea la traza de la recta perteneciente a la charnela, puesto que por pertenecer al eje de giro, no variará durante el abatimiento.

Eso pasa con la recta **ab–a'b'** (fig. 178), en que el punto se confunde con la traza. Se abate un punto cualquiera **c – c'.**

En la misma figura se ha abatido la traza α' y la horizontal **r–r'**. Para abatir la horizontal, se usa el punto **c–c'**. Por **C**α, paralela a α hasta que corte la perpendicular de **v** a α .

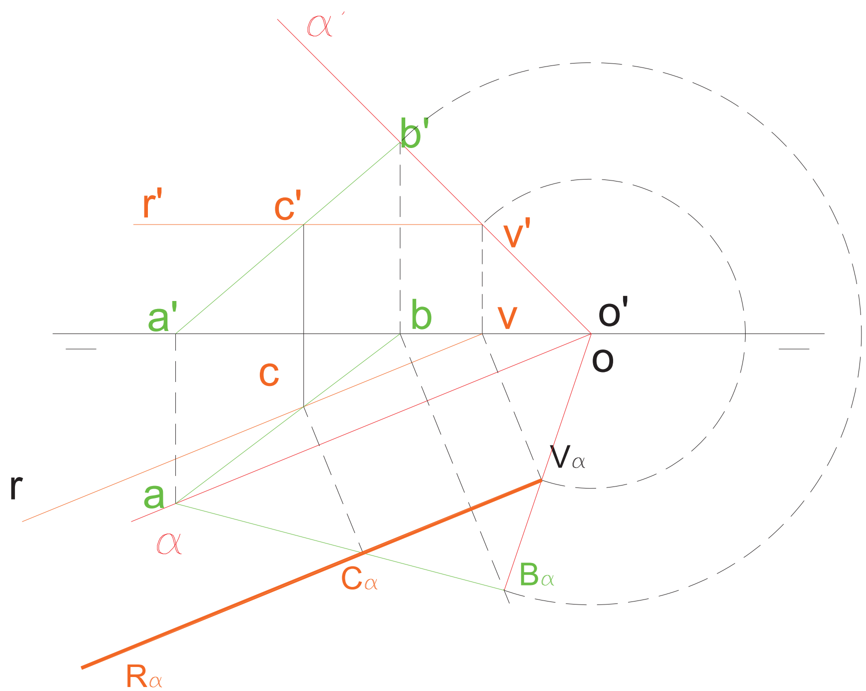


Fig. 178

También es más sencillo desde **o**, con radio **v'–o**, un arco hasta que corte la perpendicular de **v** a α en **V'**α . Uniendo **O** con **V'**α, tenemos la traza α'α abatida.

Abatimiento de una figura plana: Lo más simple será abatir punto por punto, pero tantas rectas obstaculizarían el procedimiento. En general se usa una traza abatida del plano y acudir a frontales y horizontales u otros métodos que la práctica aconseje.

Para proceder en el depurado: (fig. 179):

ABATIR LA POLIGONAL ABCD. Los pasos a seguir son:

1° Suponemos que **ab–a'b'** es una recta en la que A pertenece a la horizontal R y el B a la frontal F del plano por lo que abatimos la **r–r'** por su traza **v1–v'1** que es un punto de la charnela**:** α'α es la traza abatida.

2° De **V**α paralela a α. De **a** , perpendicular a la charnela hasta encontrar la recta abatida **R, obteniendo así el punto A**α; de h2, paralela a la trtaza abatida α'α, determinando así la frontal abatida que es en donde encontraremos el punto abatido Bα. CD pertenecen a la oblícua VH, la misma que para ser batida se trazan desde ambos puntos en proyección horizontal, perpendiculares a la charnela, hasta encontrar en la oblícua abatida, los puntos Cα y Dα..

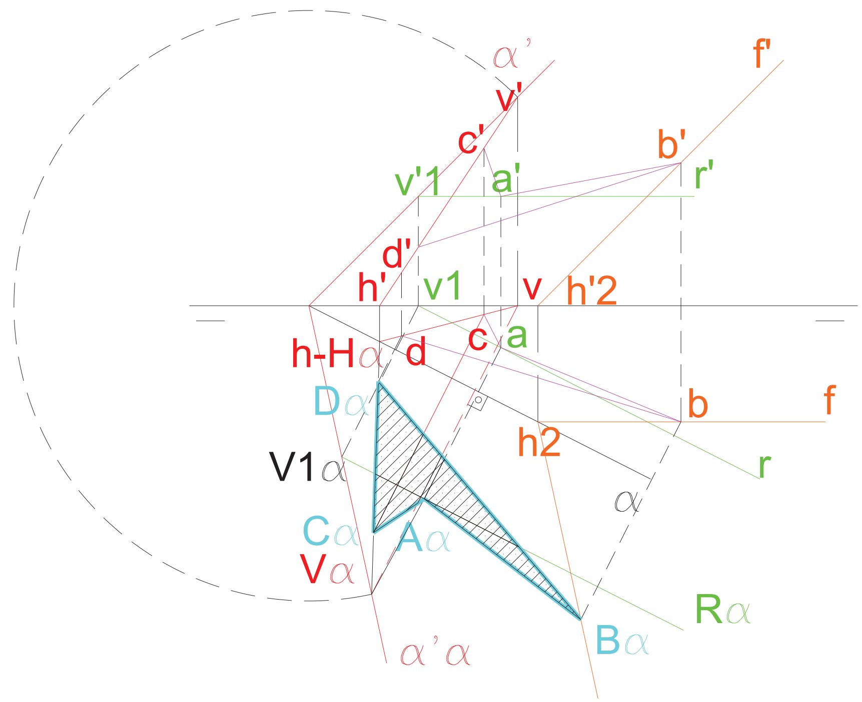


Fig. 179

Obtención de las proyecciones de una figura abatida dada: (fig.180):

Dato: Un rombo situado en el plano α de modo que su diagonal mayor sea igual a **l** y la menor, a **t**.

En el plano α, ubicamos la recta oblícua con trazas V y H.

- Por la proyección horizontal v, de la traza vertical de la recta, trazamos la perpendicular a la charnela α, hasta cortar la curva trazada con centro el punto de la intersección de las dos trazas del plano, y radio el punto v', que es donde estará la traza vertical abatida y que es por donde pasará la traza vertical abatida $\alpha'\alpha$.

– **La traza horizontal de esta recta, por estar en la charnela, es fija y tendrá como nombre h-H, que unida a la traza vertical abatida mencionada líneas arriba, nos dará la recta abatida HV.**

– **En esta recta ubicamos los puntos A, O, y B, desde donde trazamos perpendiculares a la charnela hasta encontrar la proyección horizontal de la recta mencionada, encontrando a, o y b.**

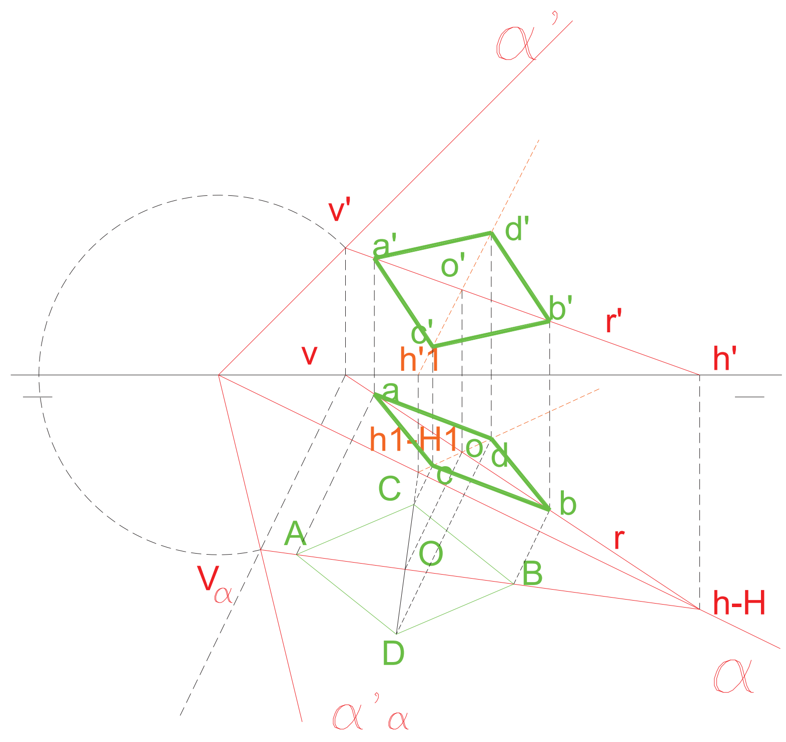


Fig. 180

– **Desde dichos puntos trazamos perpendiculares a la línea de tierra hasta la proyección vertical de la recta, ubicando a', o' y b'.**

- **Para encontrar las proyecciones de los puntos C y D, prolongamos ésta hasta la charnela, ubicando h1-H1, que será su traza horizontal.**

- **Como esta diagonal menor del rombo pasa por O, que ya está abatido, desde h1 y h'1, trazamos líneas que se unan con o y o' respectivamente, hallando de esta manera sus dos proyecciones.**

- **Desde las proyecciones horizontales c y d, lanzamos perpendiculares a la charnela hasta la proyección horizontal h1–o, hallando c y d, desde donde levantamos perpendiculares a la línea de tierra hasta encontrar la proyección vertical h'1-o', ubicando así las proyecciones verticales c' y d'.**

- **Finalmente unimos entre sí tanto las proyecciones horizontales como las verticales, definiéndose de esta manera las proyecciones a'b'c'd' y abcd del rombo.**

3.- ANGULOS

El ángulo formado por dos rectas que se cruzan, es el formado por dos paralelas a ellas, por un punto del espacio. Eso ocurre con el ángulo **Φ** entre **R** y **S** por un punto **A**. (fig. 181)

De los dos ángulos notados, se escoge generalmente el agudo, o más pequeño. Si una recta forma un ángulo con otra, será el mismo con todas las paralelas a ella.

El ángulo formado por dos planos se llama diedro; su intersección **R** es la arista. Los planos α y β, son caras del diedro. Si por un punto **A**, (fig. 183) trazamos un plano perpendicular a **R**, dicho plano se cortará con los del diedro según dos rectas, la **AB** y la **AC**.

El ángulo formado por ellas se llama rectilíneo, que es el formado por la intersección de α y β con el plano τ. La medida de un diedro es la de su rectilíneo.

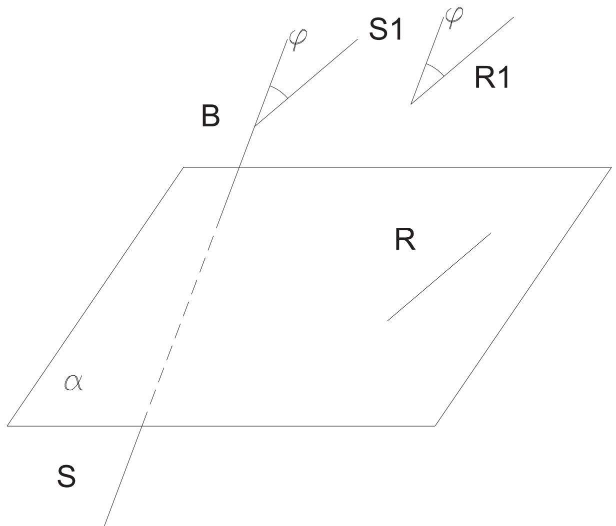


Fig. 181

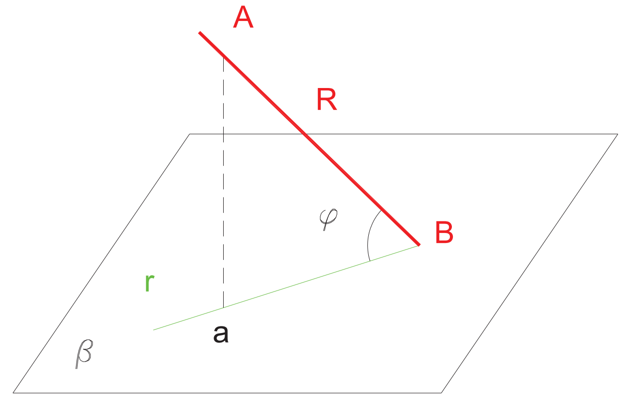


Fig. 182

Plano bisector de un diedro, es el que pasando por su arista, lo corta en dos ángulos iguales. Eso se ve con el plano φ. **AD** es la bisectriz del ánguilo rectilíneo **BAC**. (fig. 183)

Angulo de dos rectas: (fig. 184 y 185) Se pueden considerar dos casos:

a) Las rectas se cortan:

Se quiere hallar el ángulo por dos rectas que se cortan en **A**.

Si α es uno de los planos de proyección, y **B** y **C** son las traza<s de las rectas con el plano, abatimos sobre a el plano formado por las dos rects. Como **B** y **C** están en la charnela, no se mueven. Abatimos entonces **A** sobre **A**α y se mide el ángulo φ. (fig. 185) Su solución en el depurado es así (fig. 185)

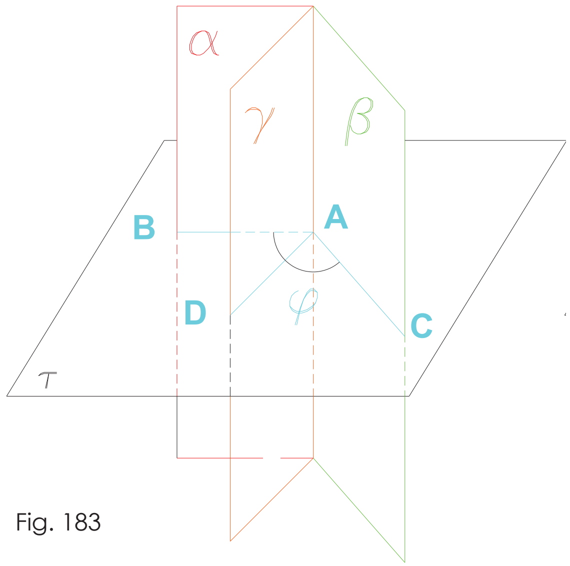


Fig. 183

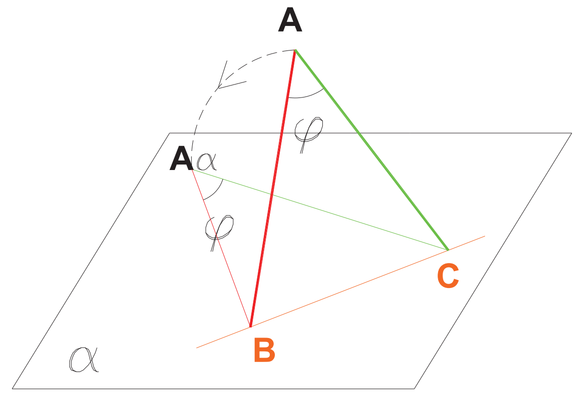


Fig. 184

1° **R** y **S** son las rectas que se cortan en **A**.

2° Las trazas **B** y **C** determinan la charnela **BC** coincicente con α.

3° Abatimos **A** sobre α**.**

4° Las uniones de **B** y **C** con A, nos dan las rectas abatidas y por lo tanto el ángulo θ de ellas.

b) Las rectas se cruzan:

Si en el caso anterior las rectas fuesen **S** y **T** que se cruzan y cuyo ángulo desee medirse, por un punto **A** de una de ellas, por ejemplo la **S**, se toma una paralela a **T**, dando la recta **R**, llegándose al caso anteriormente visto.

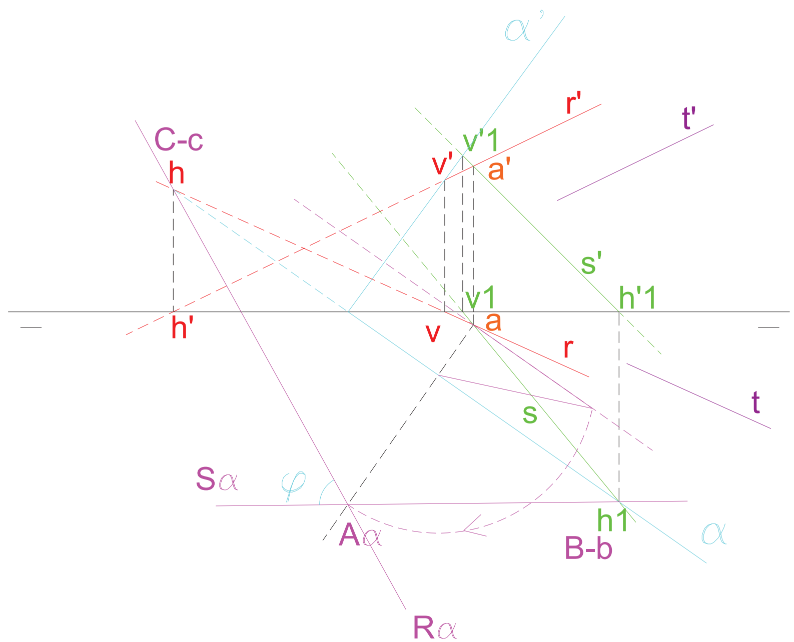


Fig. 185

Angulo de una recta con un plano:

Por lo complejo del ejercicio, se procede con una explicación paso a paso hasta su solución. (fig. 186 y 187)

1° Se halla la intersección A con el plano mediante un auxiliar proyectante vertical **ζ** por la recta **R**.

2° Proyectamos un punto cualquiera B de **R** sobre el plano dado, por la recta S y hallamos su intersección con el plano, para lo cual por S se pasa un proyectante horizontal **ζ1** que se corta con **α** según la recta V1H1. La intersección de v'1-h'1 con **s** nos da el punto **C** buscado. La proyección de **R** sobre **α** es pues la unión de A y **C** en a**c–a'c'**, y el ángulo pedido es el formado por **ab–a'b'** con a**c–a'c'.**

3° Encontramos el plano formado por R y **T**, Abatiendo ese plano que contiene a las rectas, sobre el horizontal, girando sobre su traza horizontal **γ** que es la charnela. Obsérvese que **γ’ , es la unión de v’2 – v’3 –v’4, y γ, la unión de h2 – h3 – h4, trazas verticales y horizontales respectivamente de las rectas R, S, y T.**

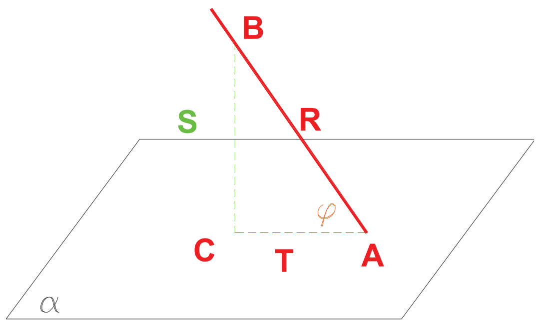
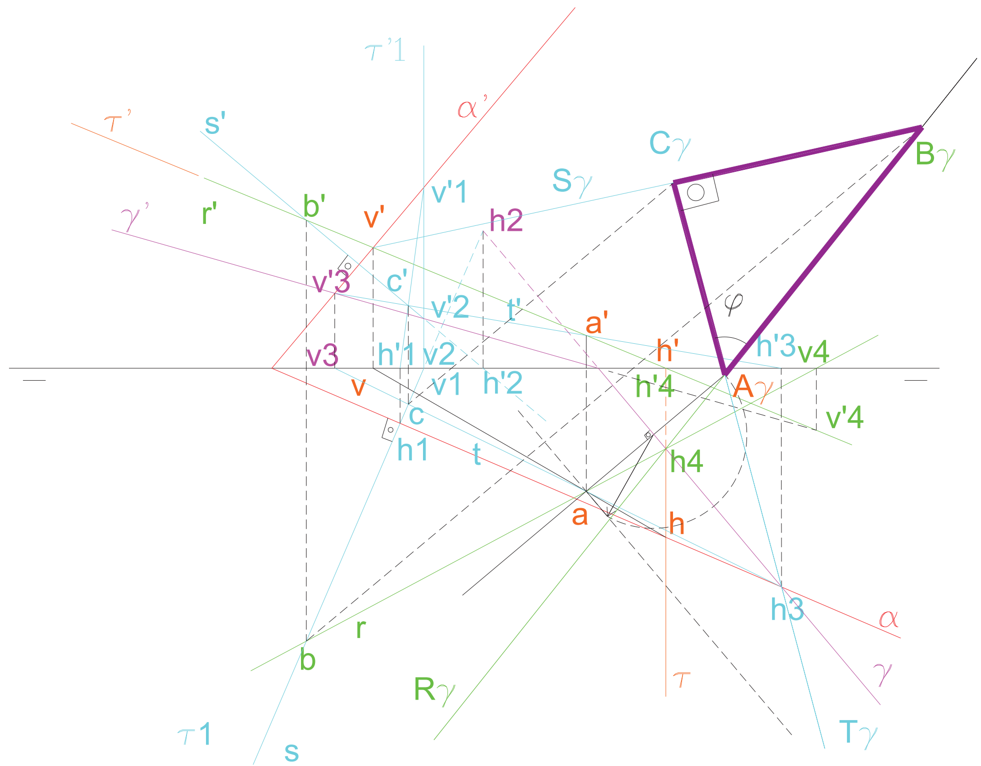


Fig. 186



4° Sobre la charnela, abatir el punto **a–a'** en **A**. Se une **A** con H2 y **H4** y se tiene las rectas abatidas que en definitiva son las que nos muestran el ángulo abatido (en verdadera magnitud.)

5° La unión de A y C, da la recta T, que es la que con R y S,determinan el triángulo rectángulo ABC (fig. 186) en el que se observa después e obtener el triángulo en verdadera magnitud, el ángulo recto en C,y el δ buscado, en A entre las rectas R y T (proyección de R sobre α**).**

Angulo de dos planos: (fig. 188 y 189) Al igual que el caso anterior, vamos a solucionar el problema paso a paso.

1° Hallar la recta de intersección de ambos planos, que es la **I**, ubicando sus trazas **h–h'–v–v'**.

2° Por un punto cualquiera **A** de esa intersección, mediante una horizontal pasamos un plano **γ** perpendicular a ella. Las intersecciones de **γ** con **b** y **α** serán los lados del rectilíneo del diedro que éstos forman.

3° **B** es común a α y β y **C** es común a β y γ; **A** es común a los tres planos; el rectilíneo buscado es BAC.

AB–AC; como charnela usamos la traza χ sobre la que se abate **A**, que unido con **B** y **C**, nos da el ángulo pedido.

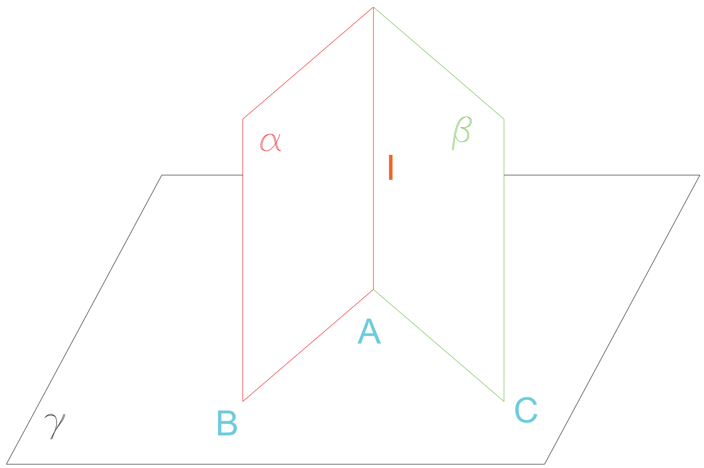


Fig. 188

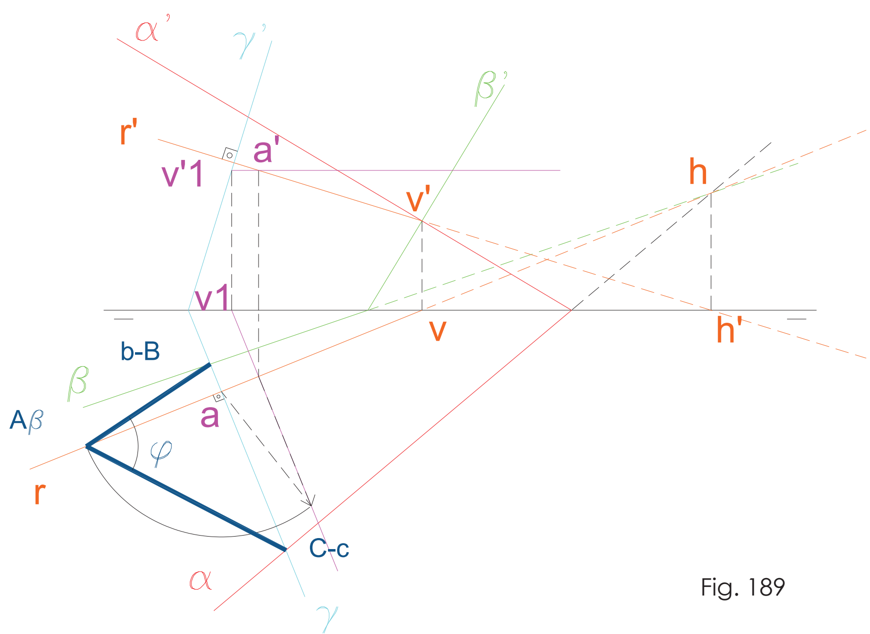


Fig. 189

Casos particulares:

a) Angulo de una recta con los planos de proyección: (fig. 190 y 191)

R es la recta. Para medir su ángulo con el horizontal de proyección, basta abatir su proyectante horizontal. El punto h está en la charnela; basta abatir su traza vertical en Vζ1 y medir ϕ.

Del mismo modo para ver su ángulo con el vertical de proyección, un proyectante vertical **ζ**. v es fijo; se abate el ángulo ϕ

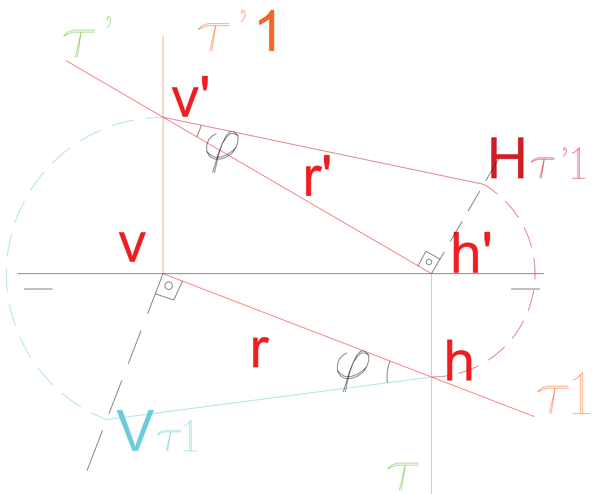


Fig. 190

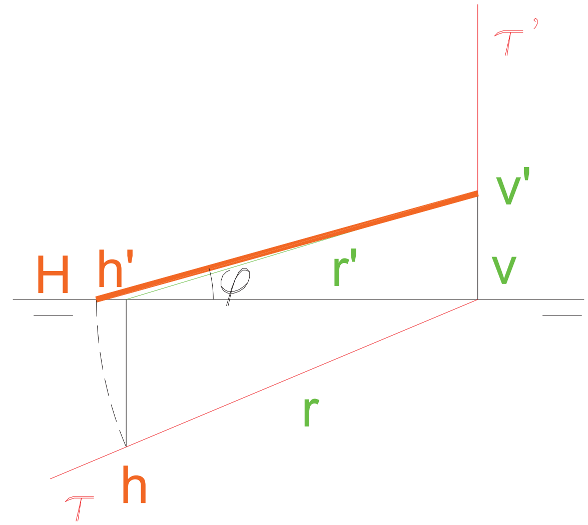


Fig. 191

También se puede girar directamente sobre su eje vertical (fig. 191) que pasa por su traza vertical. De ahí se va a **H**. El ángulo se mide de H a línea de tierra.

b) Angulo de un plano con los de proyección: Obsérvese que los lados del rectiíneo son precisamente la recta de máxima pendiente **AB,** con lo que el caso se reduce al anterior, es decir buscar el ángulo wur forma la recta **AB** con el plano horizontal.

Similarmente en el caso del plano vertical, los lados fel rectilíneo son la recta de máxima inclinacióm **CD**; el ángulo es el π (fig. 192)

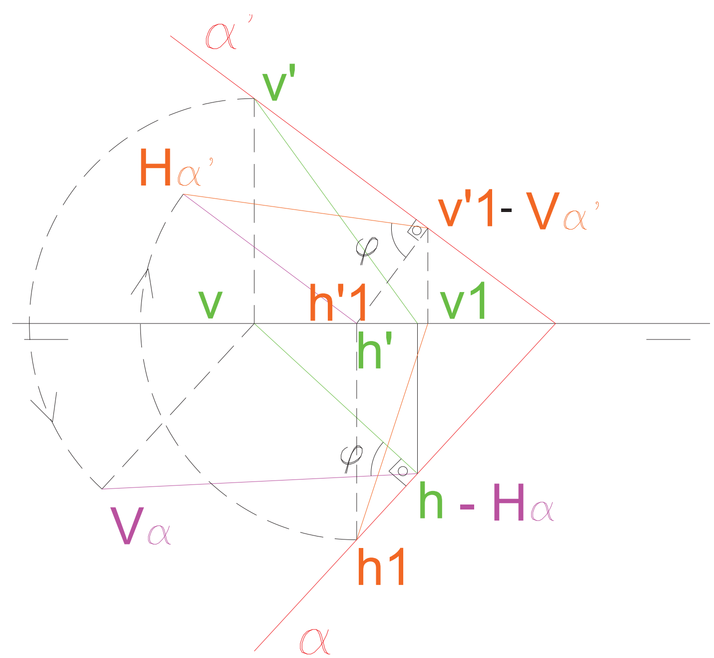


Fig. 192

QUINTA UNIDAD

1.- CAMBIO DE PLANOS

El cambio de planos es un subterfugio más para facilitar la resolución de problemas de verdadera magnitud, haciendo quedar la figura en la posición deseada.

Este procedimiento consiste en sustituír uno de los planos de proyección, sea el vertical o el horizontal, por otro ortogonal al plano de proyección que se conserva, obteniéndose así otro sistema diédrico de planos ortogonales.

No pueden cambiarse los dos planos a la vez, siendo preciso escalonar las operaciones para conseguir la posición definitiva que se desee; esta operación puede repetirse las veces que se desee, aunque en la mayoría de los casos basta con efectuar dos cambios alternados, es decir, primero el horizontal y luego el vertical,

Hay que tener en cuenta que en todo cambio de plano, la figura del espacio queda fija, siendo los planos y las proyecciones sobre ellos, los que varían.

Nuevas posiciones del punto en el cambio de plano: (fig. 193 y 194).

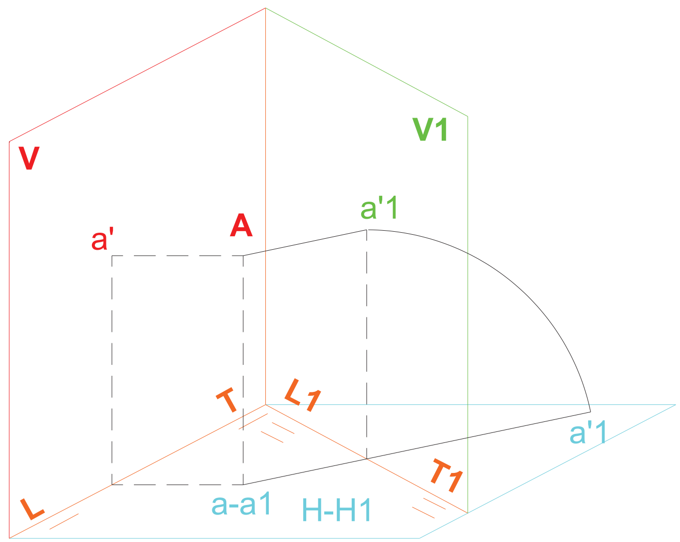


Fig. 193

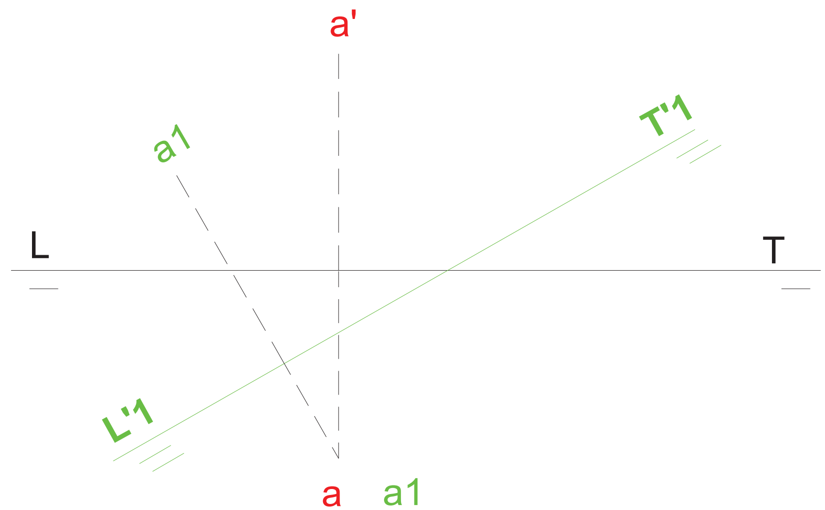


Fig. 194

H y **V** son los planos de proyección. Un punto **A** del espacio se proyecta sobre ambos en **a** y **a'1**, y al abatir el plano vertical, **a'1** pasa a la posición **a'**, siendo **a - a'** las proyecciones del punto como ya sabemos, o viceversa.

Si se elige un nuevo plano vertical de proyección **V1**, también perpendicular a **H**, forma un nuevo sistema diédrico configurado por **H1** y **V1**, siendo **H1** el mismo plano horizontal anterior. Ambos determinan una nueva línea de tierra **L'1 - T'1.**

Las nuevas proyecciones del punto **A** serán **a1** y **a'1**, quedando confundidas **a** y **a1**, puesto que el plano horizontal es el mismo.

Al abatir el nuevo plano vertical, **A'1** toma la la posición definitiva, **a'1,** de tal modo que **oA'1 = Aa**, igual a la cota **h** del punto **A**, siendo además **a1 - a'1** perpendicular a la nueva línea de tierra.

Aunque se cambie el plano vertical, la cota no varía. Para distinguir las nuevas líneas de tierra se adopta el siguiente convenio:

Al fijar una nueva línea de tierra, deben dibujarse enseguida lo trazos respectivos, colocando dos en cada extremo si se trata del primer cambio, tres, si fuera el segundo, etc. A cada nueva línea de tierra, se le designa con las dos letras L y T, afectadas del subíndice 1, si se trata del primer cambio de plano, 2, si es el segundo, etc. añadiéndoles además una comilla si el cambio de plano es vertical. (fig. 194)

De todo lo dicho y recordando que al efectuar un cambio de plano vertical, no varía ni la proyección horizontal, ni la cota, se deduce la siguiente regla:

Para obtener las nuevas proyecciones de un punto a - a' en un cambio de plano vertical, se coloca a la proyección horizontal a , que no varía, su nueva letra a1 , y desde ella se traza una perpendicular a la nueva línea de tierra. Sobre la perpendicular, y a partir de su intersección con la nueva línea de tierra, se lleva una longitud igual a la que existe desde la proyección vertical a' hasta su línea de tierra, obteniéndose así, la nueva proyección vertical del punto a'1, que debe quedar respecto de sus trazos, en la misma posición relativa que la antigua respecto de los suyos.

Si el cambio fuera del plano horizontal, se aplica la misma regla, invirtiendo las palabras vertical por horizontal. (fig. 195)

Cambio de dos planos de proyección: (fig. 196) Si hay que efectuar dos cambios de plano, éstos se harán sucesivamente como dice la regla. Eso pasa en la figura 196: primero un cambio de plano vertical, siendo **L'1 - T'1** la nueva línea de tierra; aplicando lo dicho, **a**, se confunde con **a1** y **a'1** está encima de **L'1 - T'1** con cota **h** igual a la de **a'**.

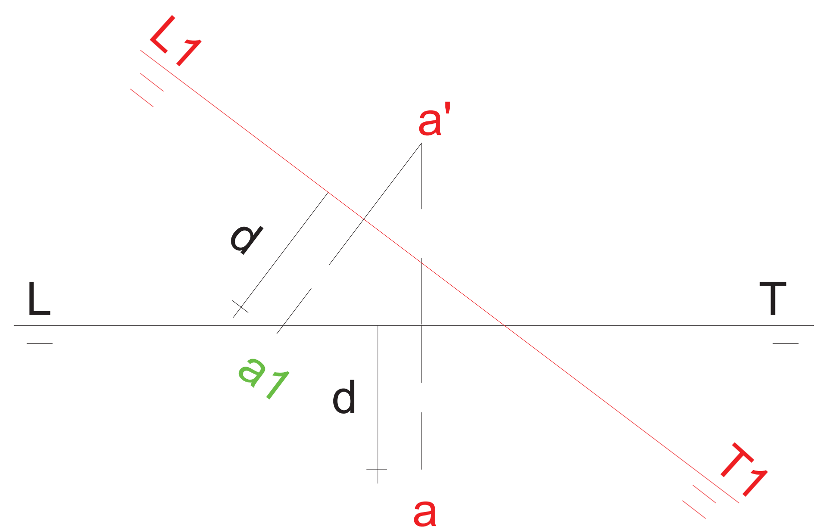


Fig. 195

Un segundo cambio de plano, esta vez horizontal: la nueva línea de tierra es **L2 - T2**, en que **a’1** se confunde con **a’2 y a2** estará bajo la nueva línea de tierra y a una distancia **d**.

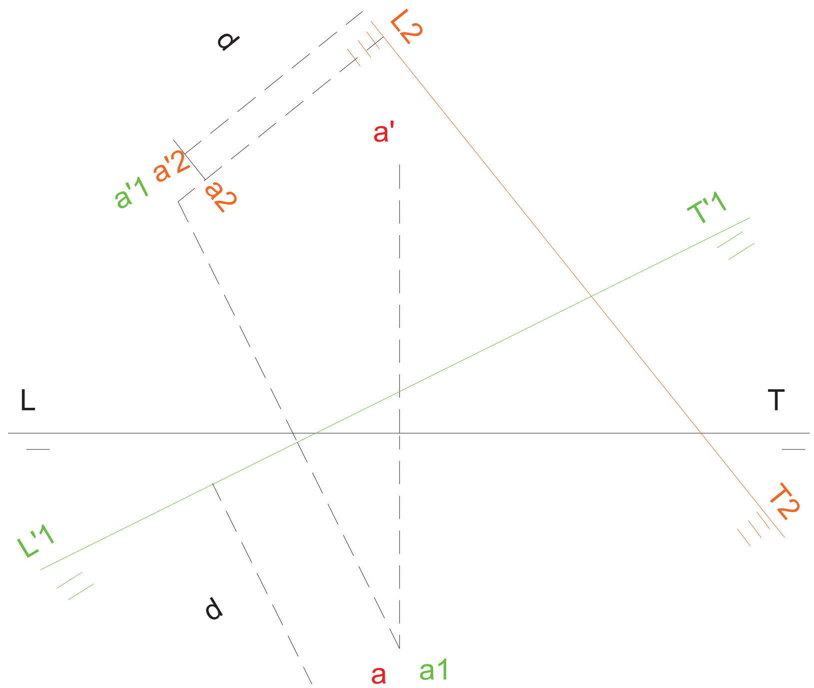


Fig. 196

La recta en los cambios de plano: (fig. 197) Basta determinar dos puntos cualesquiera de la recta en el cambio de plano. Uno de los puntos es **a**, y el otro, su traza horizontal, que en el cambio de plano debe estar sobre **L’1 - T’1.**

Si quisiéramos transformar una recta **r - r’** cualquiera en horizontal, cambiaríamos el plano horizontal de modo que la nueva línea de tierra sea paralela a la proyección vertical de la recta. (fig. 198)

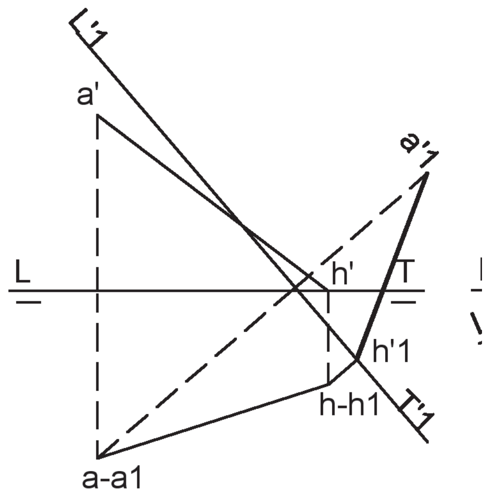


Fig. 197

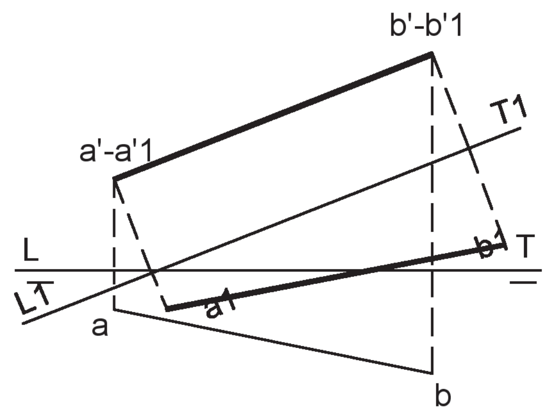


Fig. 198

Asimismo si se la quiere transformar en frontal, se hará el cambio de plano vertical, de modo que la nueva línea de tierra sea paralela a la proyección horizontal. (fig. 199)

Para convertir una recta cualquiera en vertical, primero la convertimos en frontal, mediante un cambio de plano vertical, y luego en vertical mediante un cambio de plano horizontal que sea perpendicular a la nueva proyección vertical (fig. 199). Los pasos a seguir son:

1º **a1 - b1** paralela a **L'1 - T'1**.
2º **a'2 - b'2** perpendicular a **L2 - T2.**

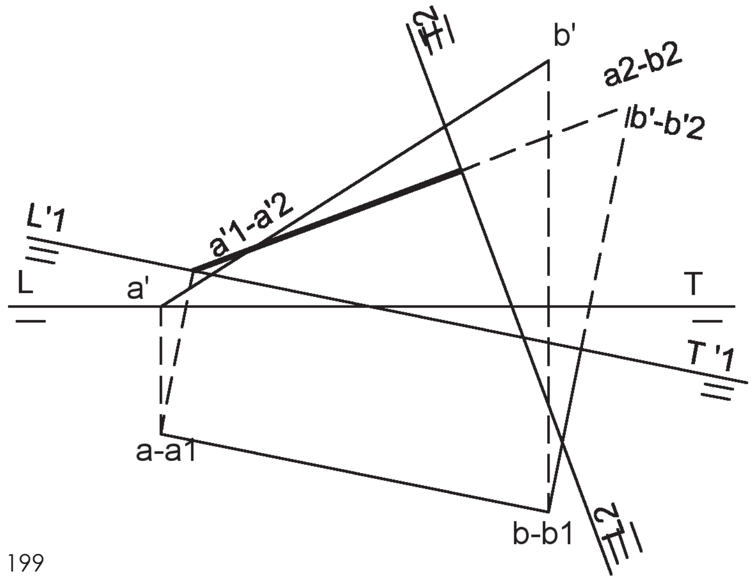


Fig. 199

Caso similar ocurre para convertir en recta de punta una recta cualquiera: primero mediante un cambio de plano horizontal, la convertimos en horizontal, y luego por otro cambio de plano, esta vez vertical, perpendicular a la nueva proyección horizontal, en recta de punta.

Nuevas trazas del plano: (fig. 200 y 201) Tenemos dos casos:

1° **Ambas LT se cortan:**

V1 es el nuevo plano vertical y **L1–T1**, la nueva línea de tierra α su traza horizontal no se mueve; α**'1** es la nueva traza vertical. **O** es el punto común a ambas trazas verticales cuyas proyecciones serán o**'1–o1**, coincidentes en LT.

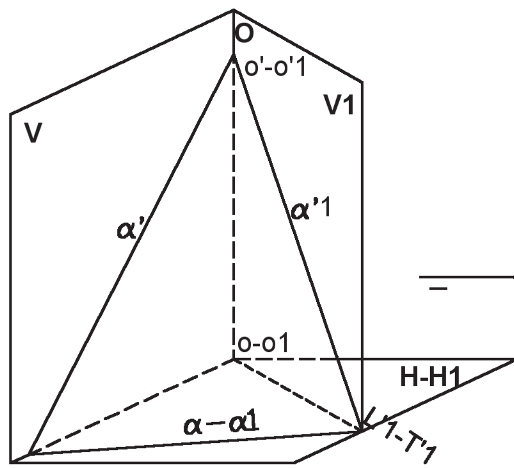


Fig. 200

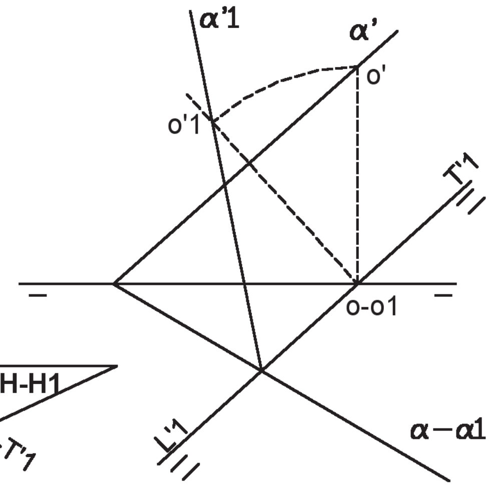


Fig. 201

La regla a seguir para esta conversión es:

Para hallar las nuevas trazas de un plano α'– α al hacer un cambio de plano vertical, se coloca a la traza horizontal α que no varía, su nueva letra α1, y se hallan las nuevas proyecciones o1–o'1 del punto o–o' de la traza vertical, cuya proyección horizontal coincide con la intersccción de las dos líneas de tierra. Uniendo así el punto o'1 con la intersección de α con su nueva línea de tierra, se obtiene la nueva traza vertical del plano.

Este procedimiento no puede aplicarse en los casos en que no se corten las líneas de tierra en el dibujo.

2° **Las líneas de tierra no se cortan en el dibujo:** (fig. 202 y 203)

Si se observa, la recta horizontal **R** tiene sus proyecciones **r'** y **r'1** paralelas a sus respectivas líneas de tierra y a la misma distancia **h**. De ahí la regla:

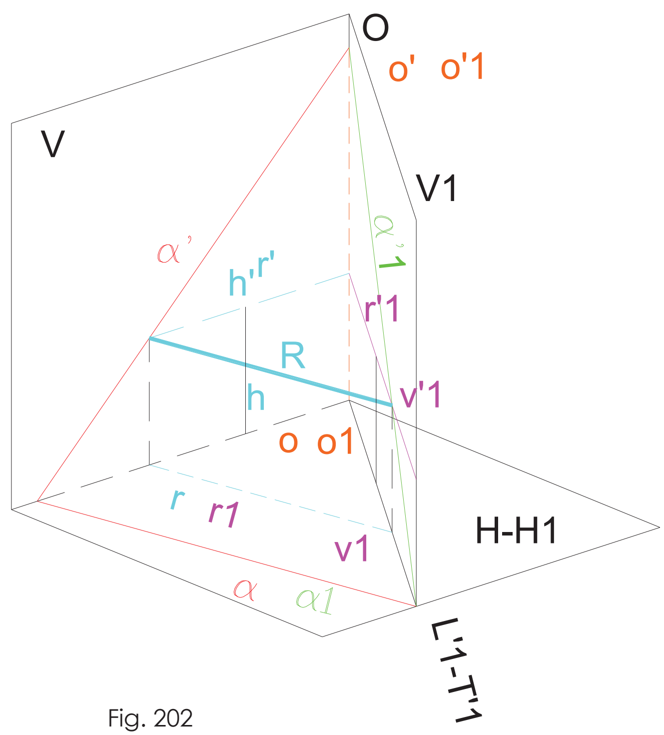


Fig. 202

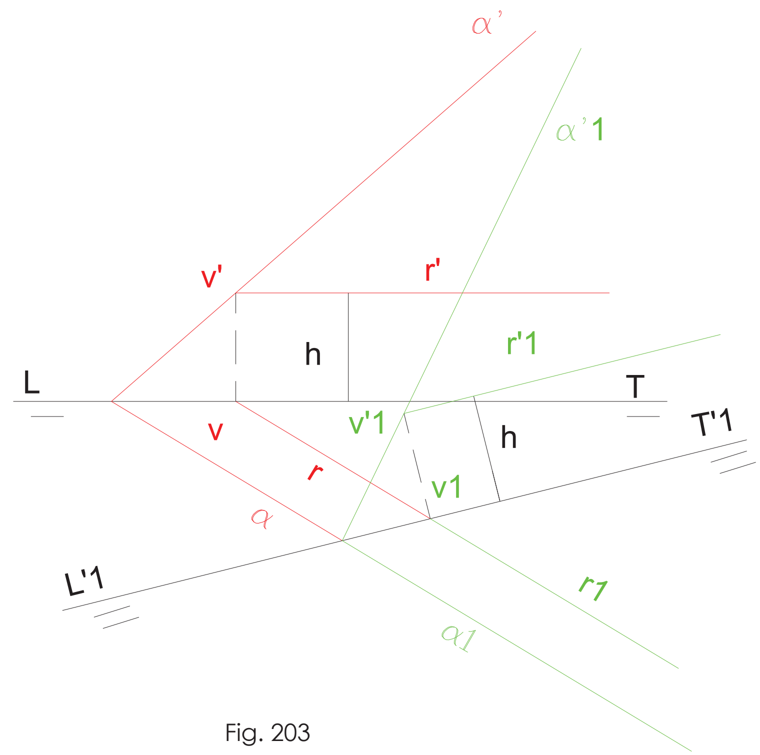


Fig. 203

Para hallar las nuevas trazas de un plano α al efectuarse un cambio de plano vertical, se coloca a la traza horizontal α que no varía, su nueva letra $\alpha 1$, y se traza una horizontal cualquiera r–r' del plano dado; se halla luego las nuevas proyecciones r1–r'1, de la horizontal y se determina su traza vertical v1–v'1; uniendo este punto con el de intersección de o1 con su nueva línea de tierra, se obtiene la nueva traza vertical $\alpha' 1$ del plano.

Cuando en vez de cambiar el plano vertical, se cambia el horizontal, estos dos procedimientos se realizan de la siguiente manera:

1° Desde **A** (fig.204), punto común a ambas líneas de tierra, una perpendicular a **L1–T1** y con centro en o'**–o'1**, girar hasta encontrar la perpendicular a la nueva línea de tierra **L1 – T1**, para determinar **a1**, que es por donde pasará la nueva traza horizontal.

2° Usando la frontal **F**, donde corte la nueva línea de tierra, **L1–T1**, a **f'** (fig. 205),una perpendicular (de **h'1**) y por una distancia **d** igual a la de **f** con **LT**, paralela a **L1–T1**, ubicando su nueva traza horizontal. Uniendo **h1**, con la intersección de α'1 con **L1–T1**, se tiene la nueva traza horizontal.

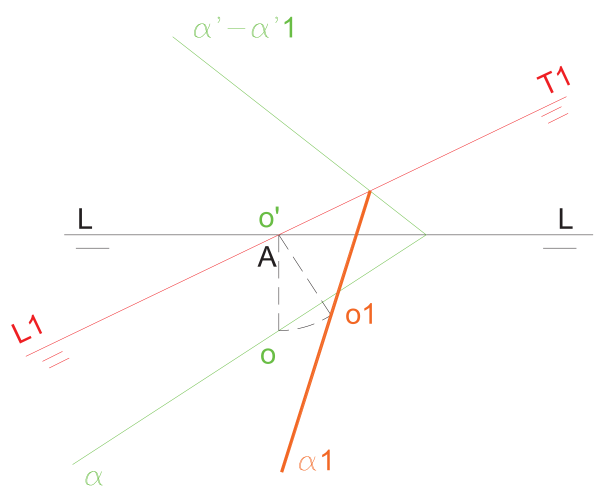


Fig. 204

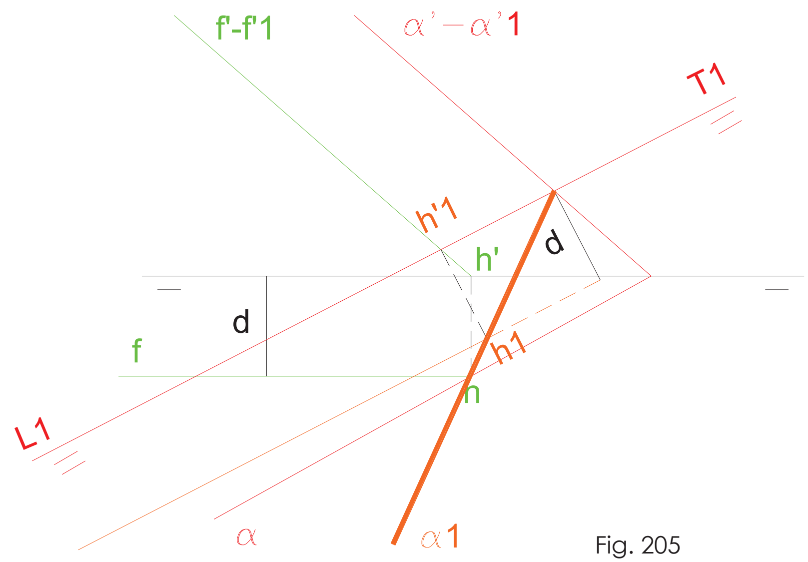


Fig. 205

Como cerramiento a este capítulo, veremos los procedimientos para encontrar la verdadera magnitud de figuras planas situadas en un plano cualquiera; ver en la parte gráfica la figura 206, la misma que contiene resumidamente los pasos a seguir para dicho fin.

– En el plano α las rectas **HV** y **H1–V1** contienen al triángulo **ABC**

– En un primer cambio de plano vertical, se convierte a α en proyectante vertical.

– Las proyecciones horizontales no varían, y desde ellas, se trazan perpendiculares a la segunda línea de tierra hasta coincidir con la traza del proyectante vertical α'1, verificando que al llevar las cotas primitivas al nuevo sistema, las verticales coinciden con α'**1**.

– Mediante un segundo cambio, esta vez horizontal paralelo a α'**1**, el plano queda convertido en α'**2,** quedando **L2–T2** paralela a α'**1**.

– Esta vez las proyecciones verticales quedan fijas, coincidentes en α'**1** y hallando las respectivas nuevas proyecciones horizontales, nos determinan **ABC**, verdadera magnitud del triángulo buscado.

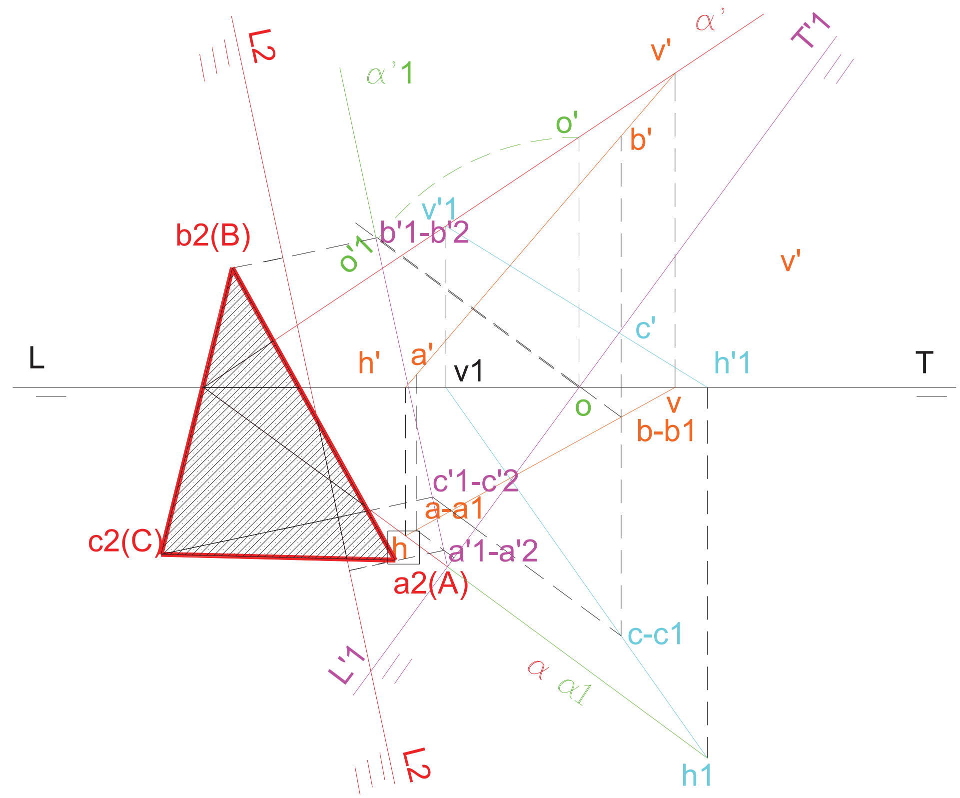


Fig. 206

2.- GIROS

Si un punto gira alrededor de un eje **E**, describe una circunferencia el nombre de **"eje de giro"**. El centro **O** es la intersección de la recta con el plano y el radio **r** es la distancia desde **O** a **A. A1** es la nueva posición del cuyo plano **α** es perpendicular a la recta **E** que recibe punto después de haber girado un ángulo ϕ .

Este es otro de los artificios de la Geometría Descriptiva para solución de problemas de verdadera magnitud, diferenciándose de los otros, en que en este caso quien se mueve es la figura del espacio.

Para que un giro quede definido hay que especificar:

a) qué es lo que gira (punto, recta, plano, etc.)

b) alrededor de qué gira

c) cuánto gira

Todos los giros se efectúan **alrededor de una recta**, no de un plano, porque es improbable; ni de un punto, porque es indeterminado.

Existe sólo un caso particular de giro alrededor de un punto, cuando se trata de figuras planas que se mueven en un mismo plano, como el caso graficado (fig. 207), aunque como se puede ver en el mismo, es alrededor de una recta, que tiene un punto común con el plano.

Puede haber muchas posiciones de los ejes respecto a los planos de proyección, aunque sólo se verá como más usuales los perpendiculares a los planos de proyección, es decir rectas verticales y de punta.

Giro de un punto: (fig. 208) Sea el punto **a–a'** que gira alrededor de un eje de punta **e–e'**. El plano que determina el punto a girar, será paralelo al vertical y por tanto proyectante horizontal de traza α, y la circunferencia que se proyecta verticalmente con centro **e'**, y radio **e'–a'**, se proyectará en verdadera magnitud.

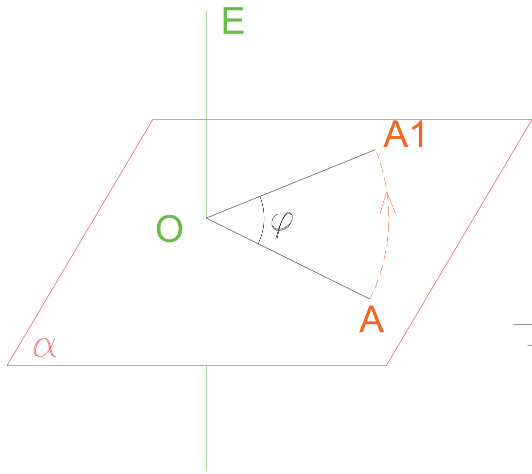


Fig. 207

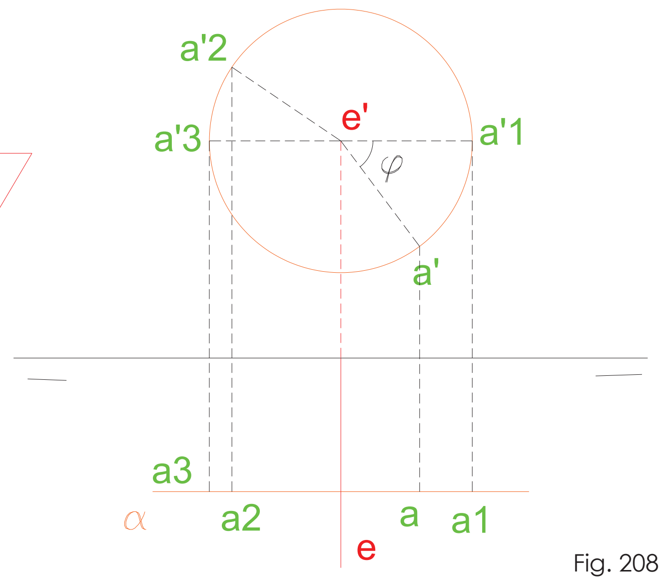


Fig. 208

A medida que el punto gira, va determinando una circunferencia en el plano vertical, y en el horizontal determinará una recta. De ahí la regla:

Para hallar las nuevas proyecciones <u>a1–a'1</u> de un punto <u>a–a'</u> que gira un ángulo ϕ alrededor de un eje perpendicular al vertical, se describe con centro en la traza vertical del eje, un arco de círculo que pase por la proyección vertical del punto; se mide el ángulo ϕ, a partir de éste en uno u otro sentido, y sus extremos serán las proyecciones verticales pedidas; refiriendo luego a la paralela a la línea de tierra, trazada por la otr proyección del punto, obtendremos la proyección horizontal.

Si el giro fuera alrededor de un eje vertical, se aplicará la misma regla, sustituyendo la palabra horizontal por la vertical, y a la inversa.

Giro de una recta: (fig. 209 y 210) Se pueden observar dos casos:

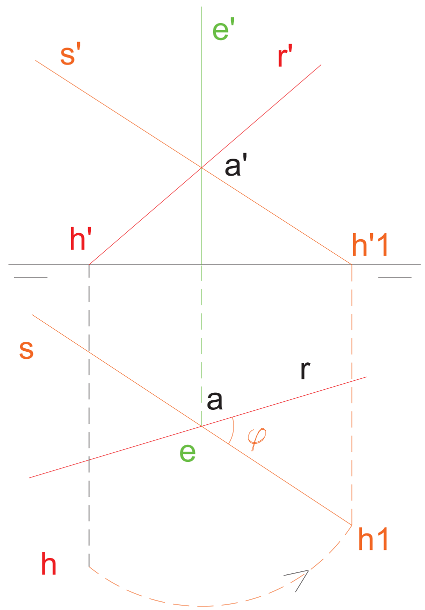


Fig. 209

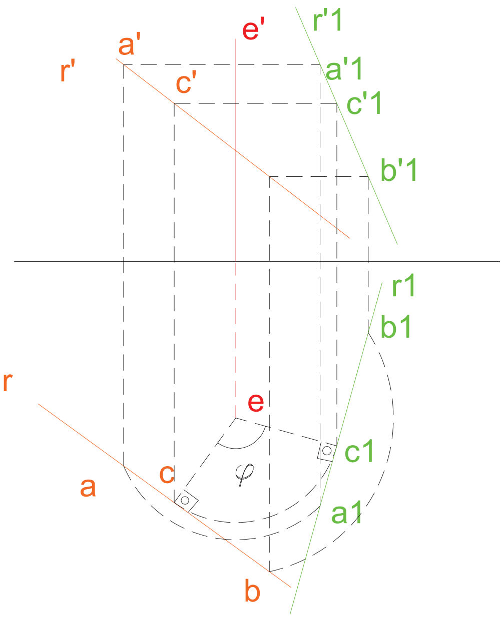


Fig. 210

1° **La recta corta al eje:** (fig. 209) Sea **a–a'** el punto de intersección del eje **e–e'** con la recta **r–r'** y suponemos girar la recta un **ángulo** φ. El punto **a–a'** no variará por pertenecer al eje de giro. Basta por tanto girar otro punto. El elegido es la traza horizontal de la recta, **h–h'**, que seguirá perteneciendo al plano horizontal; después de realizar el giro, la nueva traza horizontal será **h1–h'1**, la que unida a las proyecciones **a–a'** que no se mueve, nos determinará la nueva posición de la recta a la que llamaremos **s–s'**.

2° **La recta no corta al eje:** (fig. 210) Como la recta queda determinada por dos puntos, basta girar dos puntos cualesquiera de ella, **a–a’** y **b–b’** por el método ya sabido.

También se puede usar la perpendicular común **ec–e’c’** al eje y a la recta dada. En cualquier posición del giro, su proyección horizontal se mantiene tangente a la circunferencia de centro **e** y radio **ec**. Este es un procedimiento de fácil aplicación, cuyos pasos intermedios son:

1° Trazar la perpendicular **ec** a **r**, y **c’–c’1**, a **e’**.

2° Con centro en **e**, trazar una circunferencia y girar el radio **ec** un ángulo ϕ que nos dé **c1–c’1**.

3° La tangente en **c1** nos da la nueva posición de la recta.

4° Para hallar la proyección vertical, tomar un punto cualquiera **b–b’** y la giramos hasta ubicar **b’1** sobre la perpendicular **a–e’**.

Giro de un plano:

Para hallar la nueva posición de un plano dado al girar alrededor de un eje, podemos utilizar tres puntos, un punto y una recta, o dos rectas situadas en él.

Un método sencillo consiste en utilizar el punto de intersección del plano con el eje que no varía por pertenecer a éste, y la traza que se conserva en el plano de proyección.

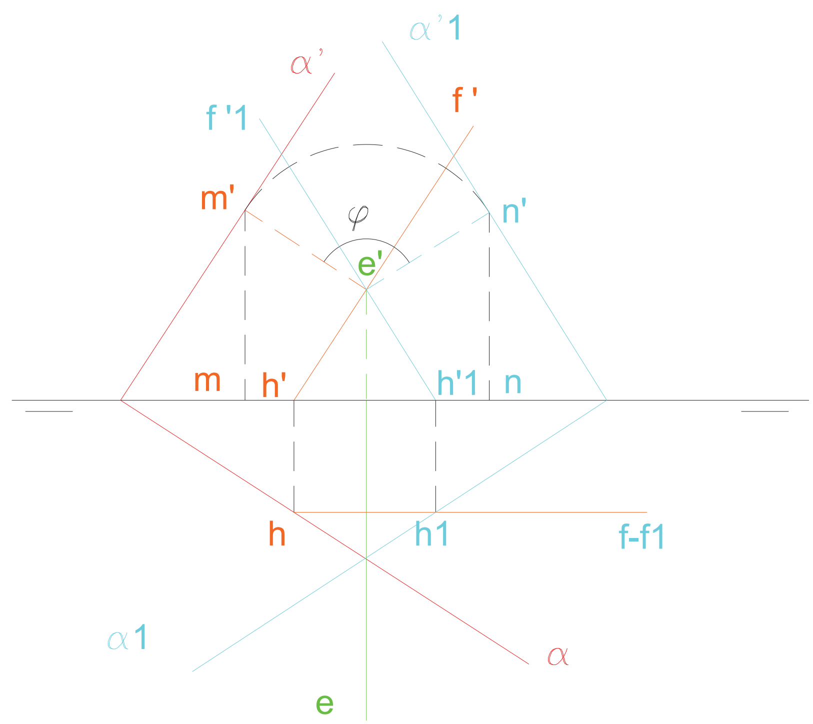


Fig. 211

El método más usual consiste en **girar la traza horizontal y una horizontal, en el caso de eje vertical, o la traza vertical y una frontal, en el caso de ser el eje una recta de punta.** (fig. 211)

En la figura citada, el eje es una recta de punta. Para girarla un ángulo ϕ , se utiliza su traza α', y la frontal **f–f'** que corta al eje **e–e'**. Se traza por **e'** el radio **e'–m'** perteneciente a α y se gira un ángulo ϕ hasta colocarlo en **n'**, dándose la nueva traza vertical perpendicular a **e'–n'**. En cuanto a la frontal **f–f'**, por **e'**, una paralela a α**'1** hasta encontrar **h'1**, teniendo que estar **h'** en **f–f'**; por **h1** habrá de pasar la nueva traza horizontal del plano.

Verdadera magnitud por giro: (fig. 212) El procedimiento para encontrar la verdadera magnitud de la figura citada, obedece a los siguientes pasos:

1° Por un eje vertical **e–e'**, mediante la recta horizontal **r–r'**, que se corta con el eje, se convierte al plano α en proyectante vertical, mediante un giro antihorario.

2° Las proyecciones horizontales giran lo que lo hizo α, es decir, el mismo ángulo y en sentido antihorario.

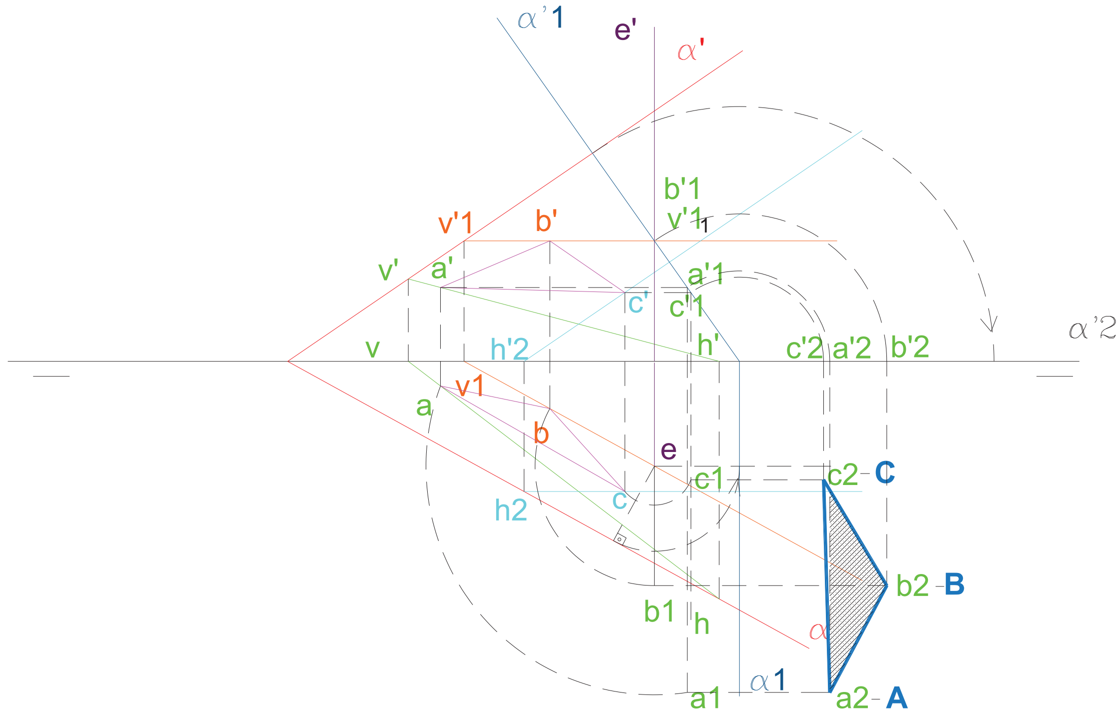


Fig. 212

3° Las verticales pasan a confundirse con α**’1** del proyectante vertical mediante paralelas a la línea de tierra, quedando ahora llamadas a’1, b’1 y c’1.

4° Mediante un segundo giro, esta vez alrededor de un eje de punta, giramos la traza vertical a’1 hasta confundirla en paralela a la línea de tierra, o hasta confundirla con ella; en el preente caso optamos por la segunda opción. Con ello se arrastra a las proyecciones verticales a’1, b’1, y c’1, en a’2, b’2, y c’2.

5° Como para este anterior giro se hizo una operación de giro horario, desde las proyecciones horizontales a1, b1, y c1, trazamos paralelas a la línea de tierra, hasta encontrar las perpendiculares bajadas a la línea de tierra desde a’1, b’1 y c’1, obteniendo de esta forma las proyecciones definitivas a2 – A, b2 – B y c2 – C, que serán las que nos definan la verdadera magnitud del triángulo bjeto del presente ejercicio. La unión de A, B y C, nos dará pues la forma y dimensión real en verdadera magnitud del triángulo buscado.

EJERCICIOS

1) Encontrar la verdadera magnitud de una figura irregular contenida en un plano, con vértices sobre cuatro de sus rectas:

Sobre el plano α ubicamos cuatro rectas: **R**, oblícua que contiene los puntos **A** y **B**.

S, oblícua que contiene los puntos **C** y **D**.

T, horizontal que contiene los puntos **E** y **F**.

U, frontal que contiene los puntos **G** e **I**.

La figura a trabajar está formada por la unión de los vértices **AEGCBDFIA**.

Abatiendo cada una de las rectas sobre la charnela α, y los puntos en ellas contenidos, tendremos la verdadera magnitud de la figura en cuestión.

Para abatir α', utilizamos la traza vertical de la recta **R**. (**v'–v**) (fig. 213).

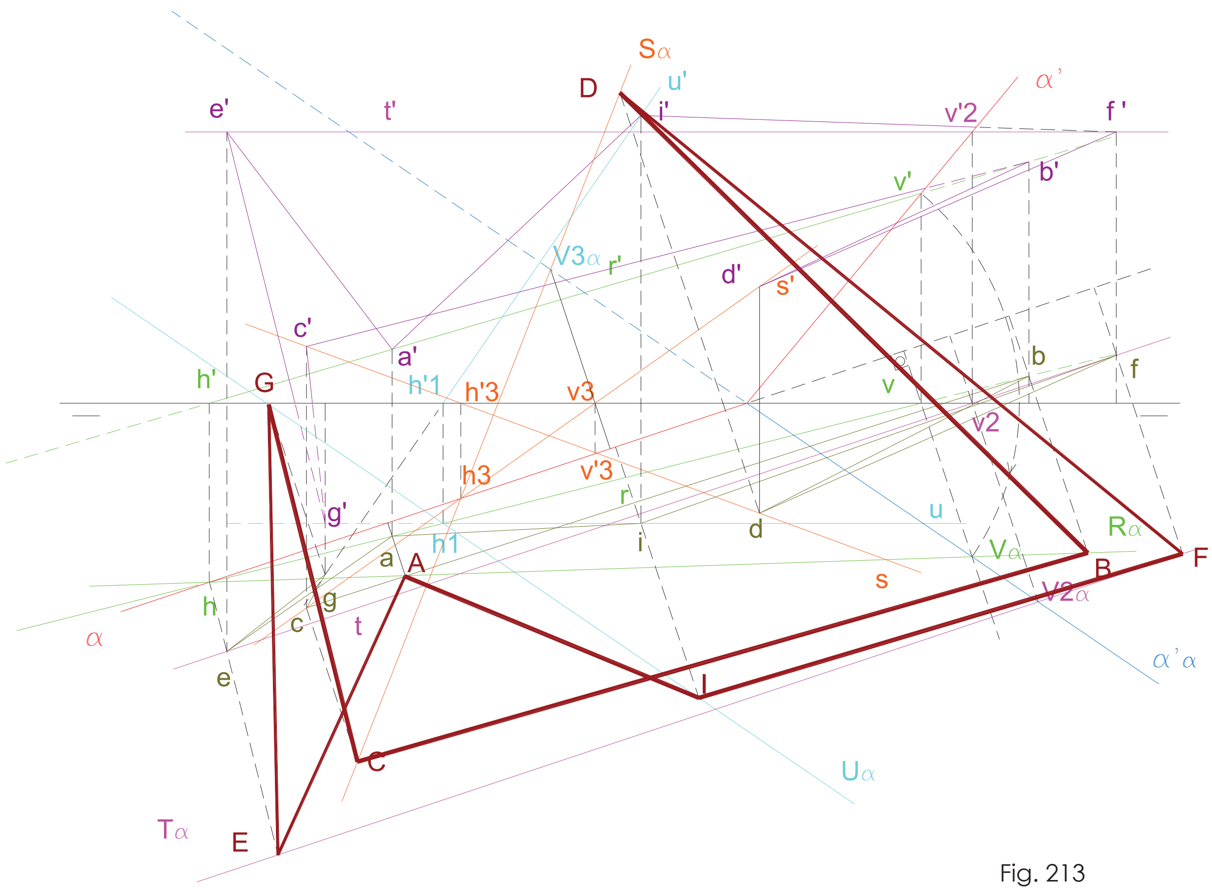


Fig. 213

2) Encontrar las proyecciones de una figura estrellada, contenida en un plano α, partiendo de su verdadera magnitud. (fig. 214)

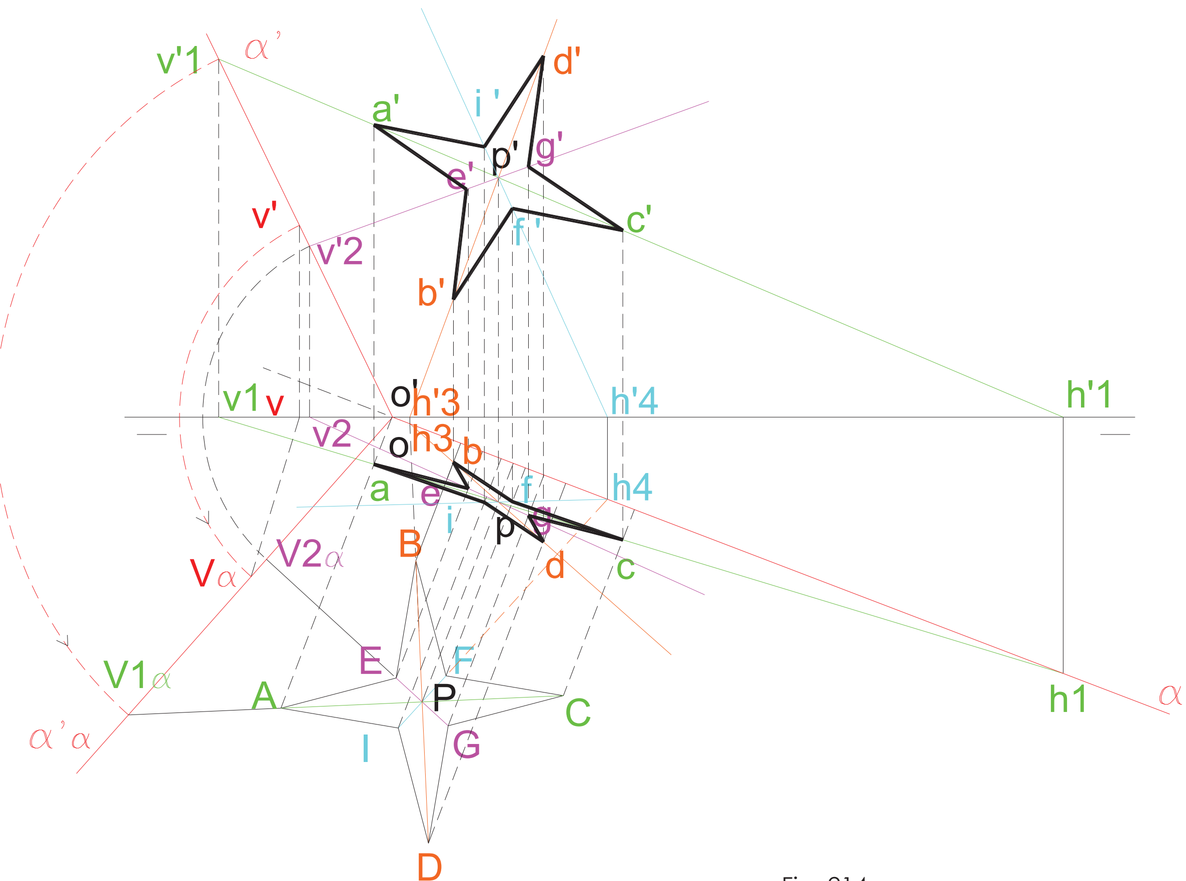


Fig. 214

- Abatir la traza vertical α' sobre la charnela α**,** utilizando la traza vertical **v'–v**, de cualquier posible recta (α'α).

- Dibujar una figura estrellada simétrica de ejes mayores **AC** y **BD**, ejes menores **EG** y **FI**, y centro **P**.

- Como el centro **P** es básico para el desarrollo de la figura, levantamos la recta que lo contenga, y con ella los puntos **F** e **I** que están también contenidos en ella.

- Levantamos la recta que contiene los puntos **A** y **C**, que por pasar por **P**, basta con levantar su traza vertical **V1'**, y unir con **P**, que ya está levantado en el paso anterior, y de esa forma obtenemos las proyecciones **a'–a** y **c'–c**.

- Realizamos la misma operación con la otra recta que contiene los otros vértices de la complementaria diagonal mayor de la estrella, esto es la recta **DB**, que también pasa por el centro **P**. Todo ello a partir de su traza horizontal **h3**.

- La última recta (**EG**), se levanta a partir de su traza vertical V2.

- Las proyecciones de la figura se obtienen uniendo las obtenidas en los pasos anteriores.

3) Encontrar por cambio de plano, la verdadera magnitud de la poligonal irregular mostrada en la figura 215:

- Sea la figura **AECFBDA**, contenida en las siguientes rectas del plano α :

  recta **R**: (puntos **A** y **B**)
  recta **S**: (puntos **C** y **D**)
  recta **T**: (puntos **E** y **F**)

- Mediante un primer cambio de plano, vertical, convertimos al plano α en proyectante vertical, ubicando por los métodos conocidos, las nuevas proyecciones verticales, sabiendo que las horizontales no variarán. (Se utiliza la recta S como auxiliar para encontrar la nueva traza vertical α**’1**). Téngase en cuenta que el punto **v’1,** deja de ser traza vertical, y el **v2,** viene a ser una simple referencia para tomar su cota y determinar así la dirección a seguir por α**’1**.

- Por perpendiculares a **L’1–T’1**, desde las nuevas proyecciones horizontales (que son las mismas que las originales, pero con cambio de nombre: **a**, es **a1**, etc.), ubicamos las nuevas proyecciones verticales, que van a estar coincidentes con α**’1**, por tratarse de un plano proyectante vertical. Eso se verifica al ver que las cotas iniciales, coinciden con las segundas.

- Mediante un segundo cambio de plano, esta vez horizontal, colocando **L2–T2**, paralela a α**’1**, ubicamos las proyecciones **a2, b2, c2**, etc., que serán as proyecciones finales de la poligonal, unidas las cuales, nos determinarán la verdadera magnitud de la figura motivo del presente ejercicio.

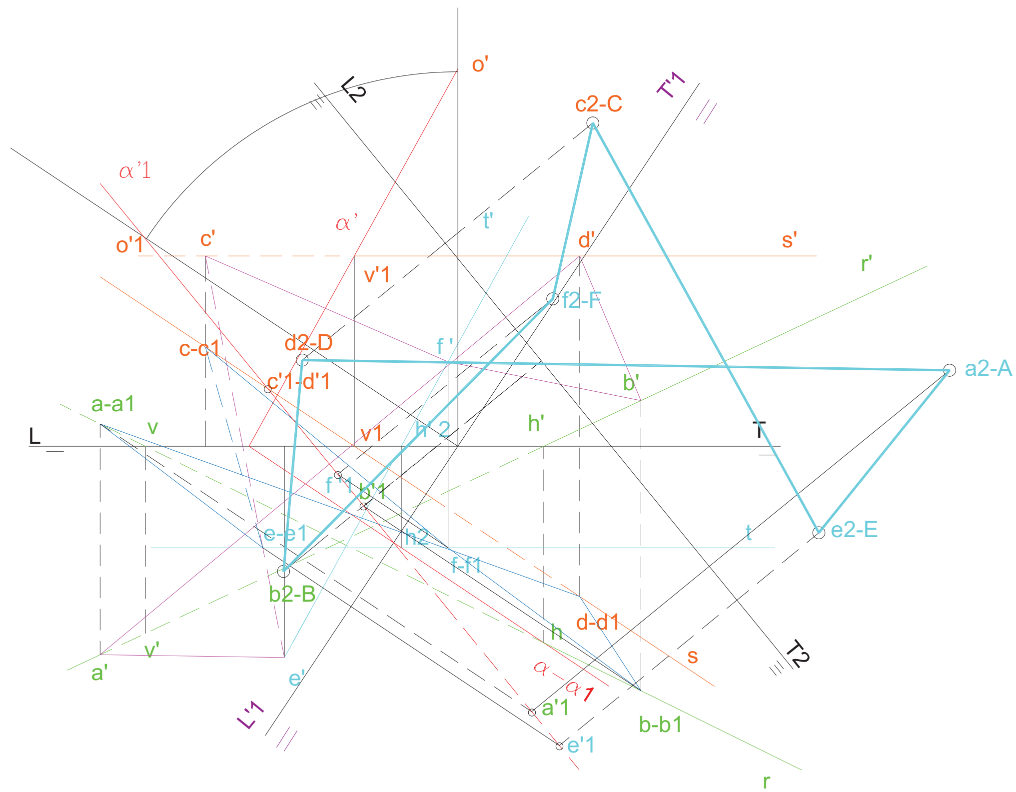


Fig. 215

4) Hallar la verdera magnitud de la poligonal **AFCGBDA**, de la figura 216, mediante el procedimiento de giro del plano α , que la contiene:

- La figura está compuesta por los siguients puntos contenidos en las rectas:

  R (**A–B**)

  S (C–D)

  T (**F–G**)

- Utilizando el eje vertical **e'–e**, convertimos primeramente al plano **α**, en proyectante vertical. Para ello utilizamos la recta horizontal **S**, que se corta con el eje en el punto **O**. En todo, se procede de acuerdo a los procedimientos ya conocidos

- Con un nuevo giro, esta vez alrededor de un eje de punta, **e'1–e1**, pasamos el plano a la posición de horizontal, para lo cual, con centro en **e'1**, giramos en sentido

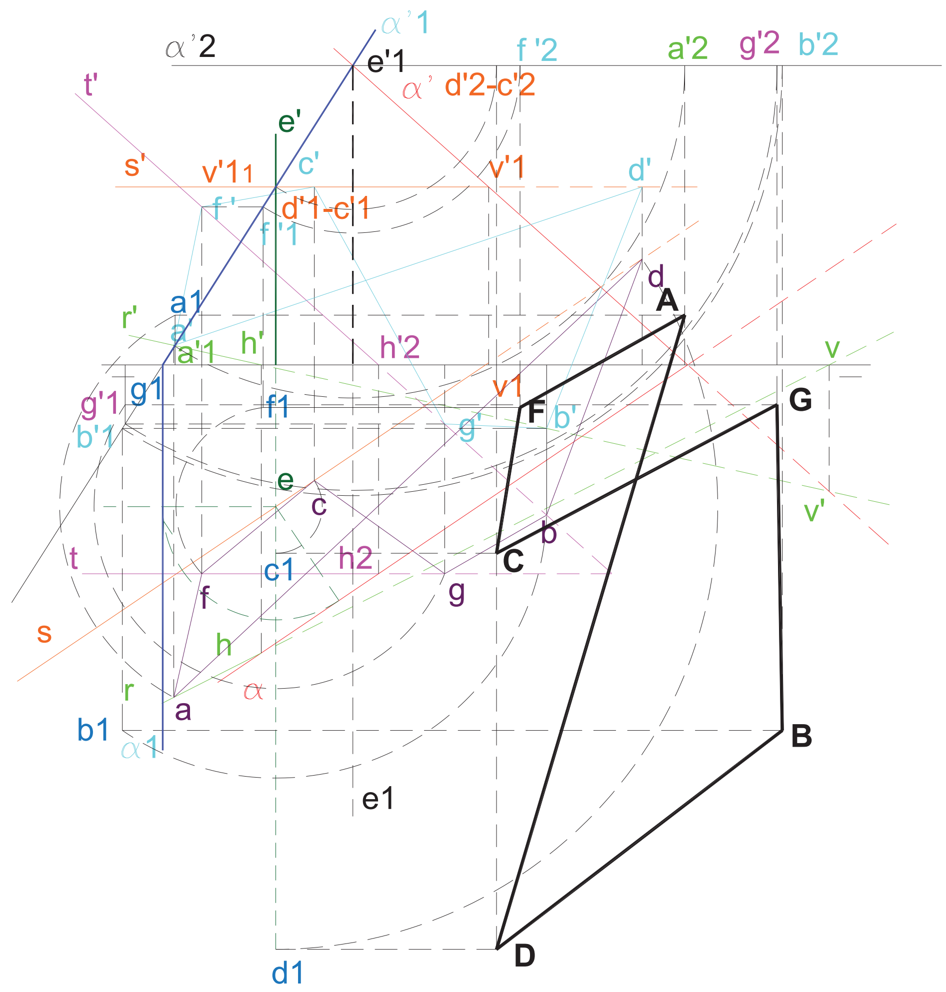


Fig. 216

horario, hasta colocar la traza α'**2**, paralela a la línea de tierra, permitiendo de esta manera, ver la figura en verdadera magnitud sobre el plano horizontal de proyección.

- La unión de esta últimas proyecciones, nos dará la verdadera magnitud de la figura solicitada.

Por los tres procedimientos conocidos para obtener verdaderas magnitudes de figuras planas, realizar todo ello con las de una misma figura, a objeto de verificar que el resultado final (verdera magnitud) debe ser igual en tamaño y forma, empezando por el procedimiento **ABATIMIENTO** (figura 217).

- Plano α'–α .

- Por v, perpendicular a la charnela α, y con radio x'v', trazar el arco hasta cortar a dicha perpendicular en Vα, que es por donde pasará la traza α'α abatida.

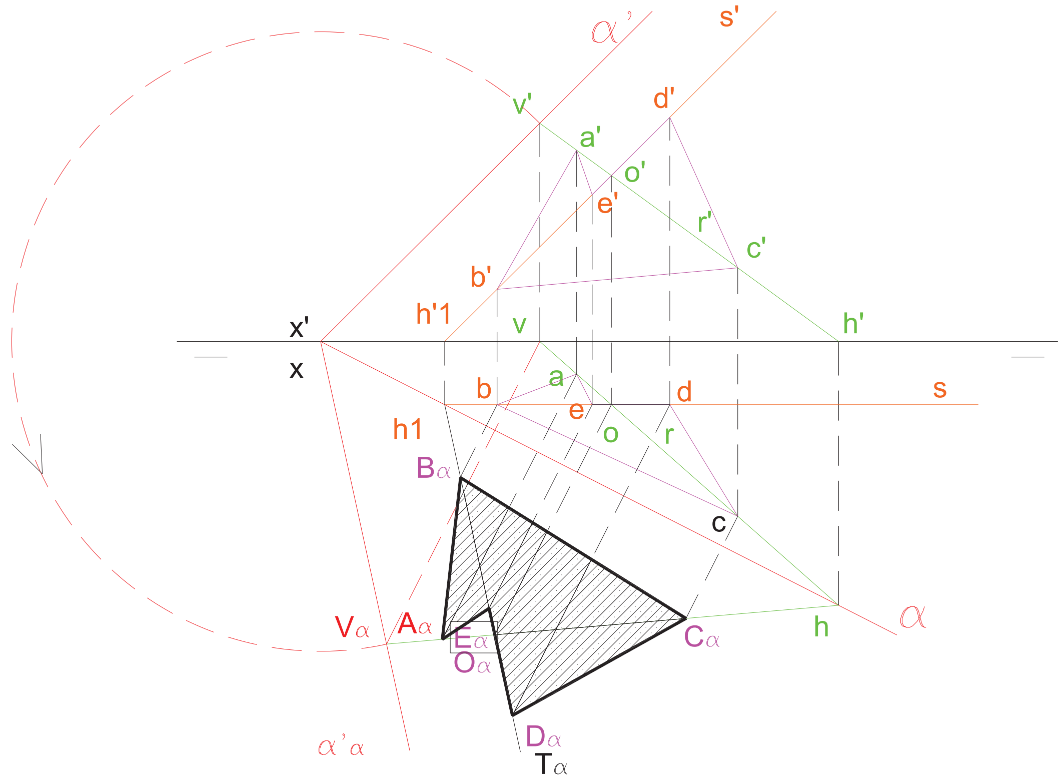


Fig. 217

- Unir Vα con Hα, que es la traza horizontal de la recta r'–r, a la que pertenecen ambas trazas.

- Por un punto O de R abatida, trazar una frontal A, que tendrá como traza horizontal la h2-h'2,bla misma que abatida será la Sα.

- Sobre estas dos rectas, trazar la figura ABCDE, estando A y C, en R, en tanto que sobre la recta S tendremos los puntos B, E y D. El punto O por ser el de intersección de las dos rectas rectas, pertenecerá a ambas.

- Abatiendo la recta R, tendremos los puntos A, C y O, en verdadera magnitud, en tanto que sobre la frontal abatida, encontraremos B, D, y E. Uniendo los cinco puntos abatidos, tendremos la poligonal vista en verdadera magnitud.

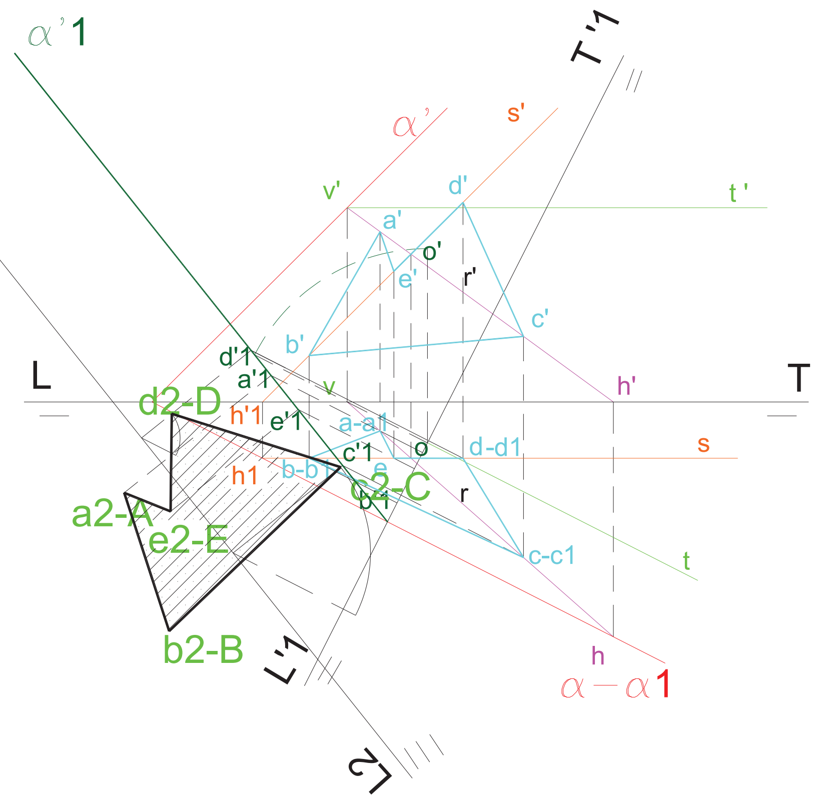


Fig. 218

- Las proyecciones a, b, c, d, e, y a’, b’, c’, d’, e’, serán las que servirán, de partida para obtener la verdadera magnitud de la figura por cambio de plano y giro.

6) POR CAMBIO DE PLANO (fig. 218)

- Se hace un primer cambio de plano vertical, colocando L’1–T’1, perpendicular a α, que coincidirá con α1. Este paso se lo hace utilizando como auxiliar la recta horizontal auxiliar t’–t.

- Por v’1, pasaará la nueva traza vertical α’1 .

- Desde cada una de las proyecciones horizontales a, b, c, d, e, que serán coincidentes con a1, b1, c1, d1, e1, se trazan perpendiculares a L’1 -T’1, hasta alcanzar α’1, encontrando en ella a’1, b’1, c’1, d’1, e’1.

- Se hace un segundo cambio de plano, esta vez horizontal, paralelo a α’1, la L2–T2.

- El plano se convirtió en horizontal, paralelo a α’2, coincidente con α’1.

- Desde las proyecciones a’1, b’1, c’1, d’1, e’1, se trazan perpendiculares a la nueva línea de tierra L2–T2, llevando a éstas los alejamientos que tenían a1, b1, c1, d1, e1, respecto de su línea de tierra L1–T1.

- Estos puntos así obtenidos, serán los puntos A2, B2, C2, D2, E2, vértices de la figura que se verán en verdadera magnitud, la misma que como se puedeverificar, es idéntica a la ABCDE inicial.

7) POR GIRO (fig. 219)

- Utilizando el eje e’, convertir el plano en proyectante vertical, girando a con centro en e, hasta convertirlo en α1, perpendicular a LT (se utiliza la recta horizontal t’–t.

- La traza vertical v’, se moverá paralelamente a L–T, hasta v’1 que es por donde pasará α’1.

- Desde las proyecciones a’ b’ c’ d’ e’, trazar paralelas a L T, hasta encontrar en α’1 las proyecciones a’1, b’1, c’1, d’1, e’1.

- Mediante arcos trazados con centro en f, desde a, b, c, d, e, encontrar a1, b1, c1, d1, e1, en las perpendiculares a L–T, bajadas desde a’1, b’1, c’1, d’1, e’1.

- Por un segundo giro, utilizando como eje uno imaginario por donde se cortan las trazas en L T , esto es α y α**’1**, se girará α’1 hasta obtener α’2, coincidente con L–T, quedando el plano convertido en horizontal.

- Con es último centro, girar a’1, b’1, c’1, d’1, e’1, hasta colocarlos en α’2, en los puntos a’2, b’2, c’2, d’2, e’2.

- Desde las proyecciones a1, b1, c1, d1, e1, trazar paralelas a L–T, hasta encontrar las perpendiculares bajadas desde a’2, b’2, c’2, d’2, e’2, determinando los puntos A, B, C, D, E.

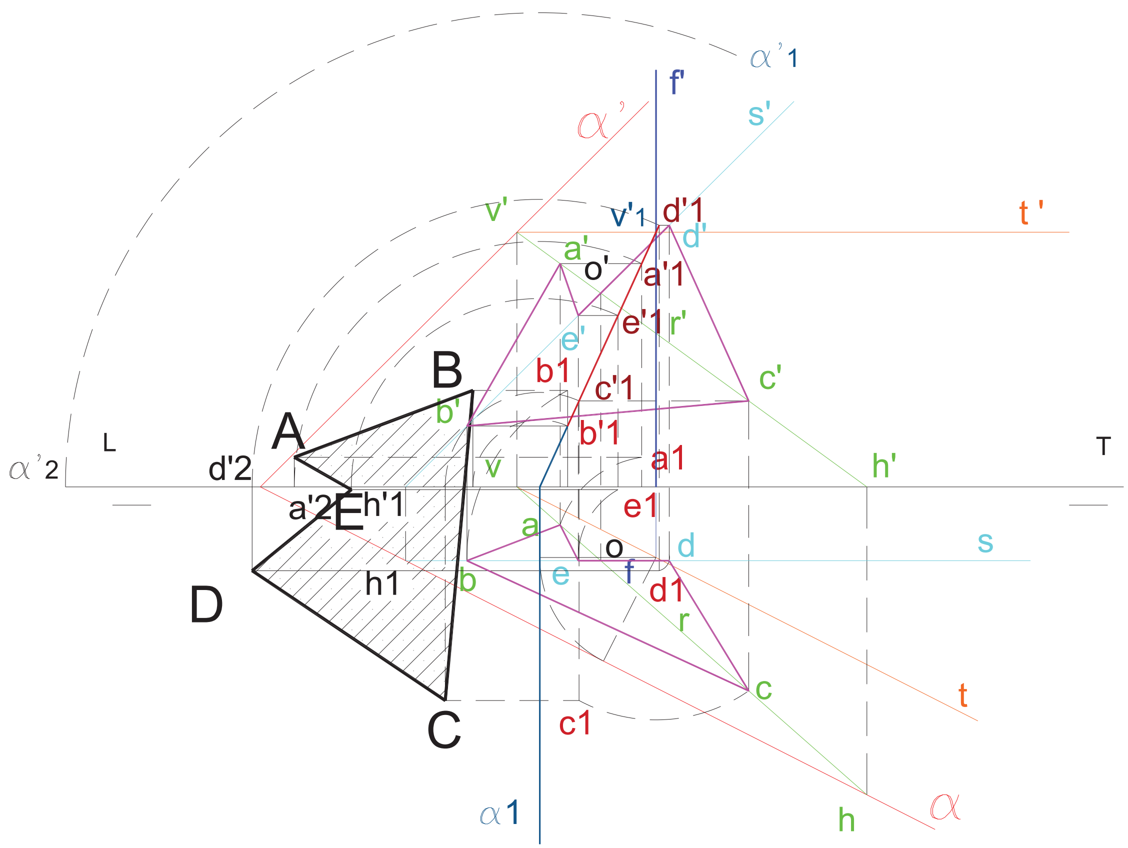

α'1
f'
s'
α'
v'
v'1
d'1
d'
t '
a'
o'
a'1
e'1
r'
e'
b1
c'1
c'
B
b'
A
b'1
L
T
α'2
d'2
v
a1
h'
a'2
E
h'1
e1
a
o
d
s
b
e
f
h1
D
d1
r
t
c
C
c1
α1
h
α

Fig. 219

SEXTA UNIDAD

SUPERFICIES

Se define como superficie, el lugar gemétrico de las posiciones de una línea indeformable o no, llamada **generatriz,** que se mueve en el espacio con arreglo a cualquier ley.

La podemos considerar como una finísima película que separa un cuerpo del resto del espacio.

No confundir cuerpo con superficie; el primero es un volumen finito y determinado, mientras que la segunda es la envoltura inmaterial que rodea un cuerpo.

Pueden presentar infinitas formas según a qué ley obedezcan o al cambio de forma de la generatriz, las cuales se traducen geométricamente en otras líneas que son las que rigen el movimiento de la generatriz.

Pueden ser también limitadas o ilimitadas; entre las primeras están las cerradas.

CLASIFICACION DE LAS SUPERFICIES:

Se las agrupa en tres grandes grupos: regladas, curvas y compuestas. Las superficies regladas comprenden dos familias: las desarrollables y las alabeadas. Las desarrollables a su vez se dividen en tres clases: planas, poliedrales y radiadas. Las poliedrales se subdividen en regulares e irregulares; las regulares son cinco:

- **tetraedro** (4 caras)
- **exaedro** (6 caras)
- **octaedro** (8 caras)
- **dodecaedro** (12 caras)
- **icosaedro** (20 caras)

Las radiales se dividen en cónicas (pirámide y cono), y cilíndricas (cilindro y prisma).

El grupo de las superficies curvas comprende las de revolución que son**: esfera, toro y escocia.** (fig. 220 y 221)

Plano tangente: primero definamos la recta tangente, que es la que tiene un solo punto de contacto con cualquier curva contenida en la superficie y que pase por dicho punto.

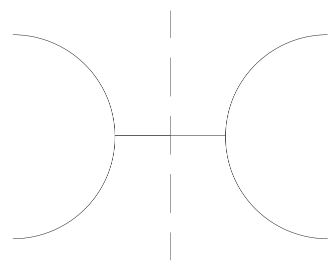


Fig. 220: Escocia

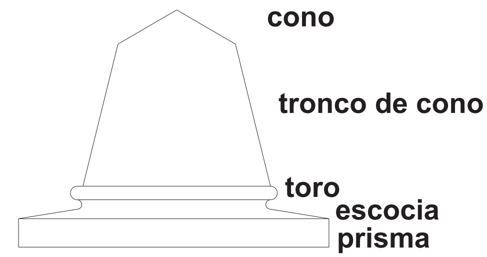


Fig. 221: Compuesta

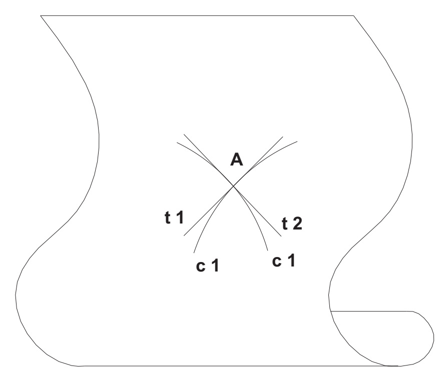


Fig. 222

Sabido esto, plano tangente a una superficie en un punto, es el lugar geométrico de todas las tangentes trazadas a la superficie en dicho punto.

Se deduce aquí el método para trazar el plano tangente a una superficie en un punto dado **A** de ella. Bastará determinar dos líneas cualesquiera **C1** y **C2** de la superficie que pasa por **A** y trazar de allí sus tangentes respectivas. (fig. 222)

Plano normal: Se dice que una recta es normal a una superficie en un punto, cuando es perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto.

Plano normal a una superficie en un punto, es todo plano que pase por la normal a la superficie en dicho punto.

Poliedros: Es un cuerpo limitado po r superficies planas (fig. 223); sus elementos son:

- caras: polígonos **AEGF**, etc.
- aristas: **GD** ...
- vértices: **B** ...

Ellos son a su vez elementos de los diedros.

Diagonal de un poliedro es la recta que une dos vértices sin ser arista ni diagonal de ninguna cara, por ejemplo la **EK**.

Los poliedros regulares son cinco: (tienen todas sus caras y ángulos iguales) **tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro,** e **icosaedro.** Todos ellos pueden ser circunscritos en una esfera.

Los irregulares son todos aquellos que no cumplen con las condiciones antes mencionadas.

Tetraedro: (fig. 224) Está formado por cuatro triángulos equiláteros y ángulos de 60º. Las perpendiculares de los vértices a las caras opuestas, pasan por el centro de las mismas.

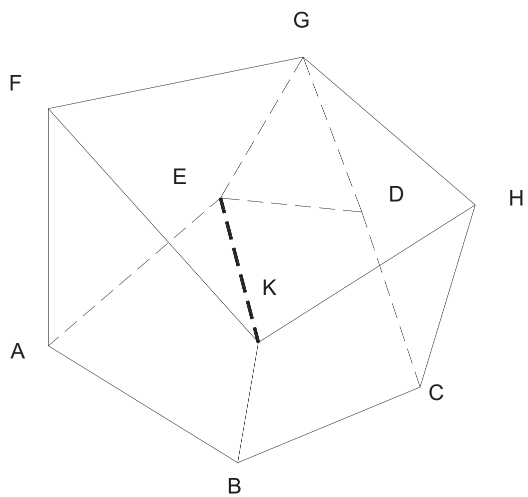


Fig. 223

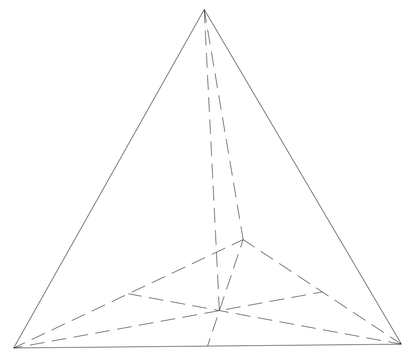


Fig. 224

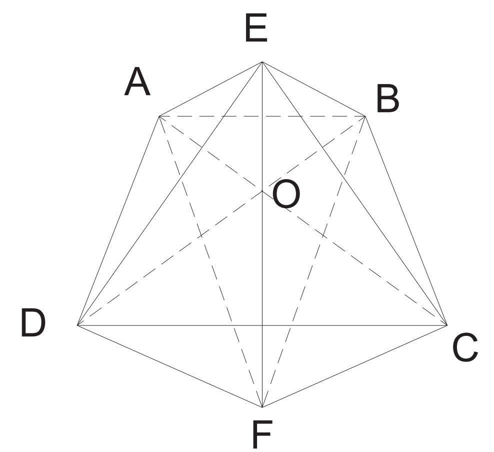


Fig. 225

Exaedro: Compuesto por seis cuadrados iguales y ángulos de 90º. Las caras contiguas son perpendiculares entre sí, y las opuestas, paralelas. (fig. 226)

Octaedro: Formado por 8 caras que son triángulos equiláteros. (fig. 225). Sus tres diagonales, **AC, BD, y EF, son** perpendiculares entre sí.

Dodecaedro: Sus caras son 12 pentágonos regulares iguales. (fig. 227)

Icosaedro: Formado por 20 trángulos equilateros iguales. (fig. 228)

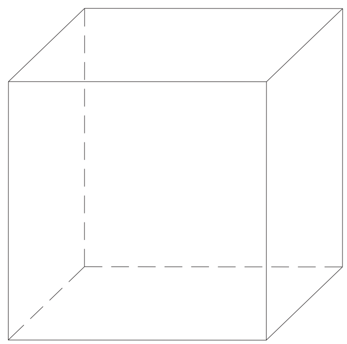


Fig. 226

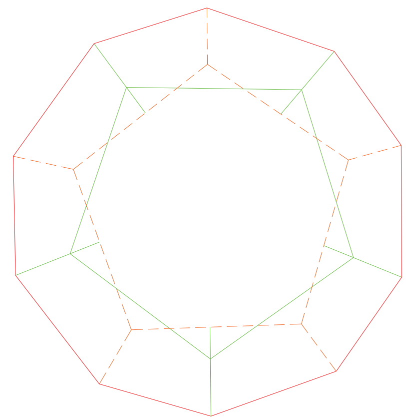


Fig. 227

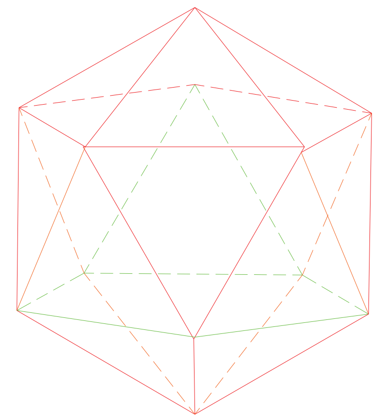


Fig. 228

PRISMA:

Como sus caras son paralelas, las proyecciones de sus lados opuestos deberán ser paralelas, al igual que las bases y aristas. (fig. 229)

En el dibujo de referencia, se trata de un prisma oblícuo de base pentagonal. En una cara cualquiera, **b–c, b1–c1, b'–c', b1'–c1',** los lados opuestos son paralelos, al igual que las aristas de las bases.

Construir un prisma recto conociendo su altura, la proyección horizontal de su base y las trazas del plano que la contiene:

Los pasos a seguir en el desarrollo del presente ejercicio son: (fig. 230)

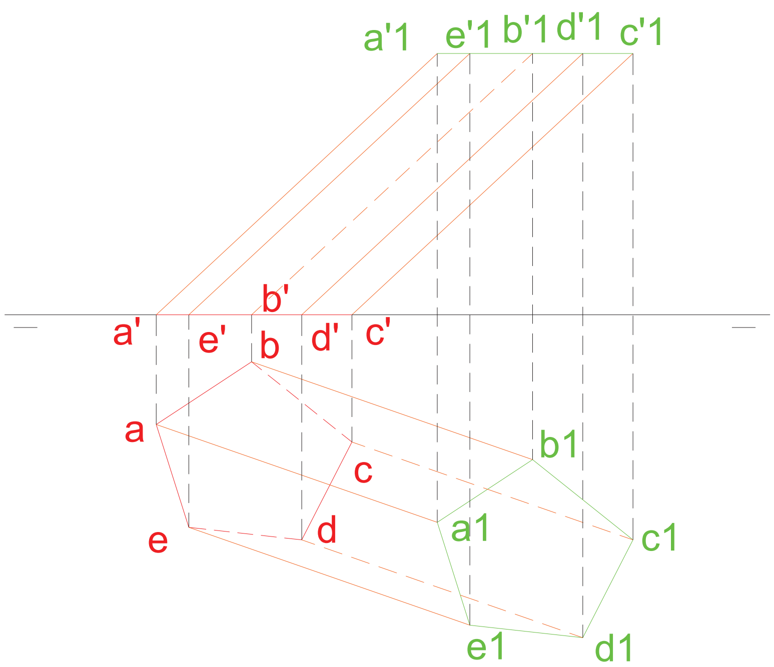


Fig. 229

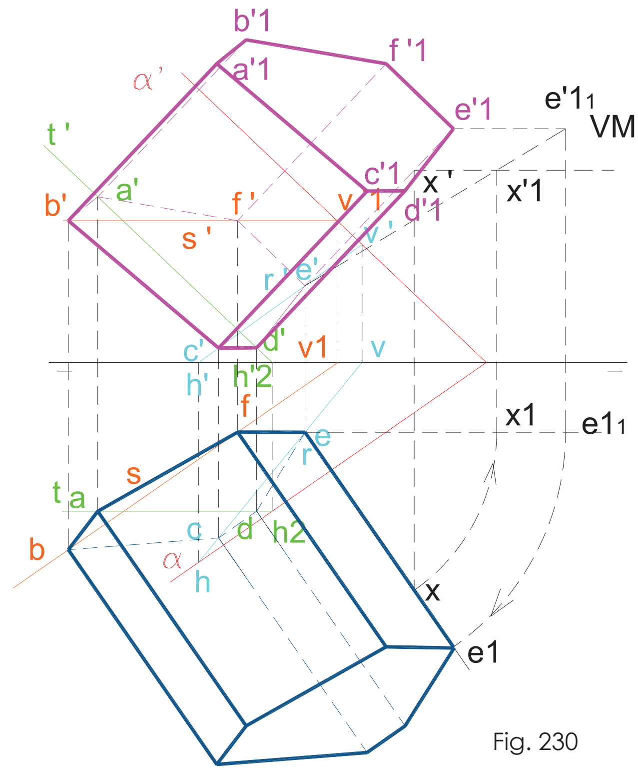


Fig. 230

1° Sea **abcdef**, la proyección horizontal del prisma; α el plano que lo contiene y e’-VM la altura del prisma.

2° Para hallar las proyecciones del prisma, trazamos tres rectas: una oblícua **r – r’, que contiene los puntos d – e,** la horizontal **s – s’** ,con los puntos b – e, y la frontal **t – t’**, los puntos a – c.

3° Trazamos luego una arista lateral cualquiera del prisma que por ser recto, será perpendicular a α que lo contiene; se trata de **e – x**.

4° Girar luego **e–x** alrededor de un eje vertical que pasa por **e – e'**, hasta convertirla en frontal y sobre ella se toma **e'–x'1,** igual a la verdadera magnitud que tendrá el prisma. Deshaciendo el giro obtenemos **e–e1, e'1 – e'1**.

5° Trazar las aristas laterales paralelas entre sí, con las mismas dimensiones obtenidas con la arista e – e', e1 – e'1, por cada uno de los vértices de la base del prisma en ambas proyeciones. Observando las proyecciones se resalta lo que es visible de acuerdo a lo que conocemos como **contorno aparente.**

Construir un exaedro (cubo) de lado l, el mismo que se encuentra apoyado en un plano oblícuo

Es un caso idéntico al ejercicio anterior, sólo que hay que tener en cuenta que al colocar la verdadera magnitud de la altura, ésta será igual al lado del cuadrado de la base, por ser todas las aristas iguales por ser un poliedro regular. (fig. 230 a)

Sección producida en un prisma por un plano que lo corte:

Para hallar la intersección de un plano con un prisma, basta hallar la intersección con sus aristas. (fig. 231)

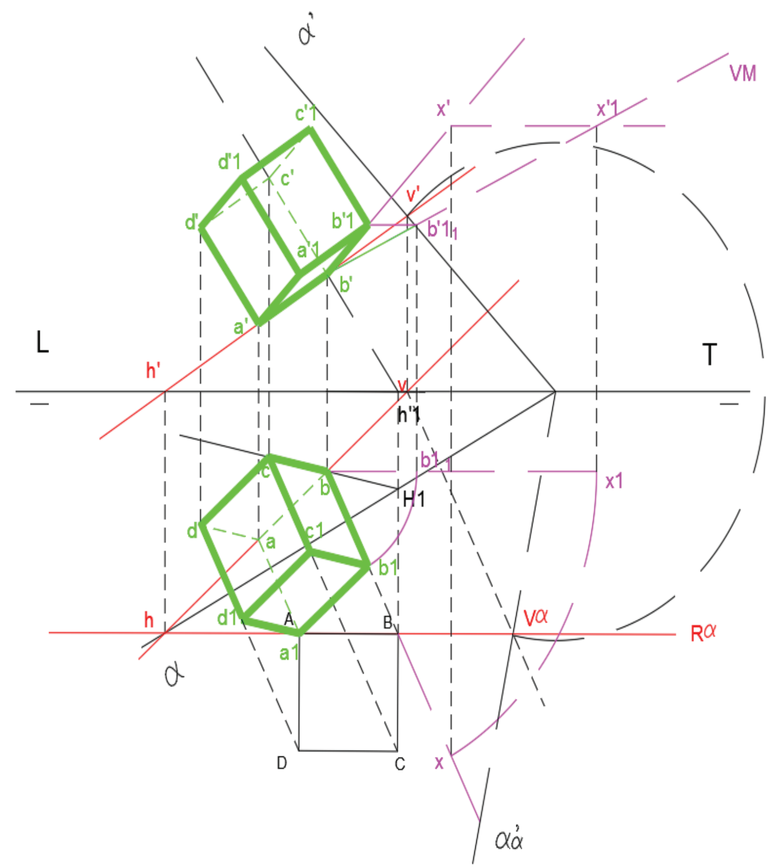


Fig. 230 a

En la figura de referencia, un plano corta al prisma según la línea **AB**. Las aristas **1, 2, 3, 4, 5, 6**, son los vértices del polígono sección con el plano secante, **a b c d e f**.

La línea **AB.** Las arisas 1, 2, 3, 4, 5, 6, son los vértices del polígono sección con el plano secante, **a b c d e f.**

En la misma se ve que las rectas de intersección del plano **α** de la base del prisma y del plano secante, concurren en el mismo punto de la traza **AB** de ambos planos: por ejemplo, los lados **3–4** y **c d** concurren en **r** y las diagonales **2–4** y **b d** lo hacen en k.

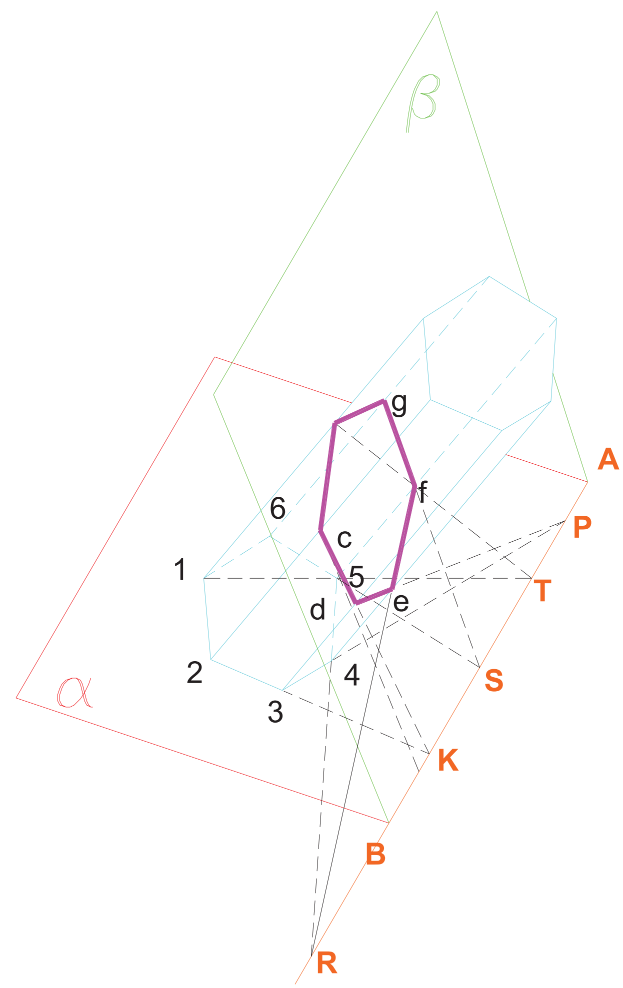


Fig. 231

Representación en el sistema diédrico: (depurado)

Prisma apoyado sobre el plano horizontal; pasos a seguir: (fig. 232)

1° Por **c–c'**, mediante un proyectante vertical por dicha arista, ubicamos el punto **1–1'**.

2° Por la arista **c–d**, prolongando hasta la traza **α** , se ubica **H1** que unido con **1–1'**, nos da 2**–2'**.

3° Prolongando **d–e**, ubicamos el punto H2 y con él, **3–3'**.

4° Prolongando **a–e**, ubicamos H3, y con él, **4–4'**.

5° Prolongando **b – a, u**bicamos H4 y con él el punto final **5 – 5'.**

Seguidamente procederemos a ver la sección en verdadera magnitud, para lo que abatimos el plano y con él la figura 1 – 2 – 3 – 4 – 5, iniciando el trabajo como se sabe ya por lo anteriormente visto, trazando la perpendicular a la charnela α**,** desde la proyección horizontal v de la recta de intersección entre el proyectante **ζ** y la arista c – c'; esta intersección es el punto 1, desde donde trazamos la perpendicular a la charnela obteniéndose el **1**α **,** abatido.

La unión de la traza horizontal H1 con el 1 abatido nos permite encontrar **2**α trazando la perpendiculaar a la charnela desde 2 a dicha recta abatida, y así proceder con los otros puntos hasta obtener la sección vista en verdadera magnitud

Sección producida en un prisma oblícuo por un plano de canto:

Como el caso es el de un proyectante vertical, sus intersecciones con la traza vertical son las cotas con cada arista, que luego se refieren al plano horizontal. (fig. 233)

Sección producida en un prisma recto por un plano de canto: (fig. 234)

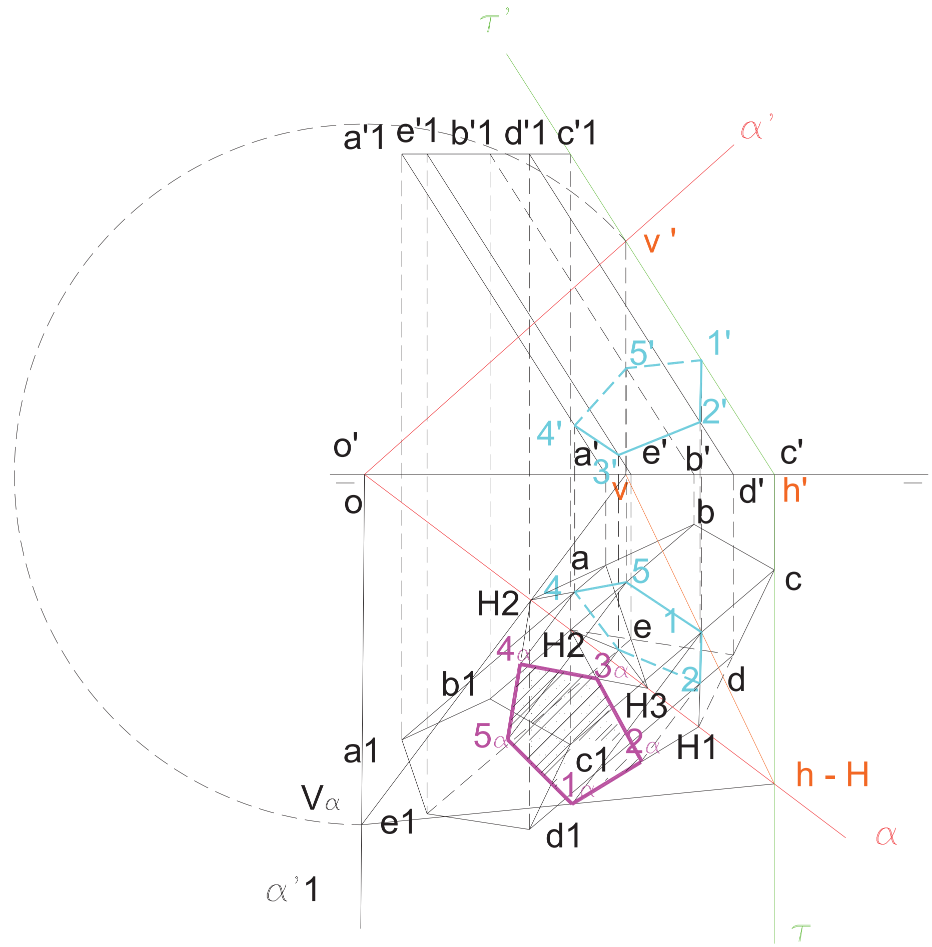


Fig. 232

La proyección de la sección se confunde con la base por ser el prisma recto, y estar apoyado en el horizontal. Las proyecciones verticales se determinan como en el caso anterior

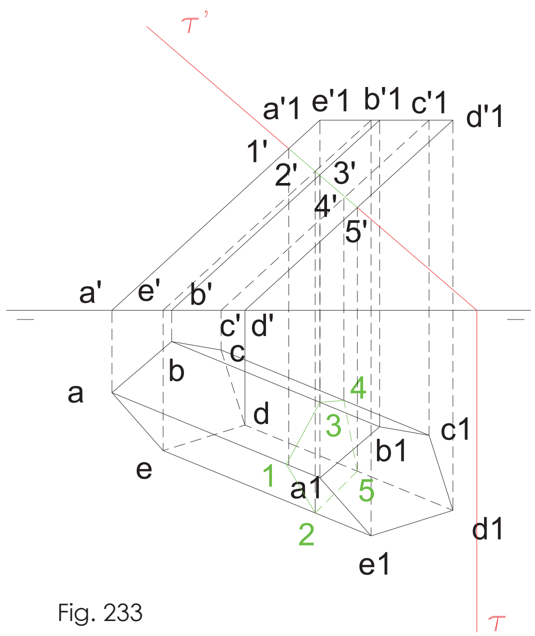


Fig. 233

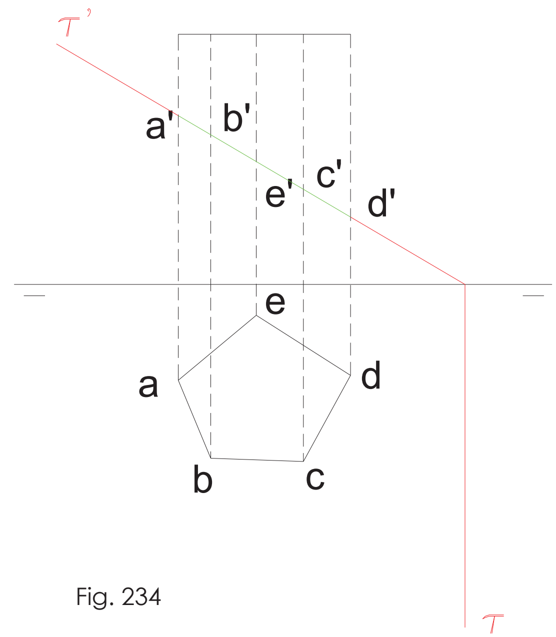


Fig. 234

Intersección de recta y prisma: (fig.235)

El prisma se lo considera apoyado en el plano α que por tanto contiene a la base de aquél. Para determinar la intersección buscada, se hace pasar un plano por la recta, plano que se lo elige paralelo a las caras laterales del prisma. A este plano lo llamamos β que se corta con α según **Hab**, que corta a los lados de la base en **a** y **b**. De los puntos **a** y **b**, se levantan paralelas a las aristas laterales, hasta encontrar a la recta **R**, que es cortada en los puntos **A** y **B** que son los que determinan la entrada y salida de la recta en el prisma objeto del presente ejercicio.

Si **R'** fuera traza vertical del plano β, las paralelas levantadas desde **t**, **a** y **b**, se referirían en **R'**, en los puntos **m'**, **A'** y **B'**.

Aplicación del presente caso en el sistema diédrico: (fig. 236)

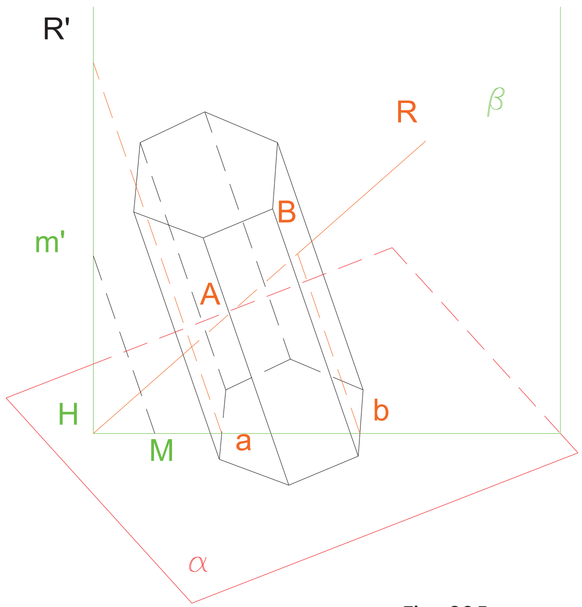


Fig. 235

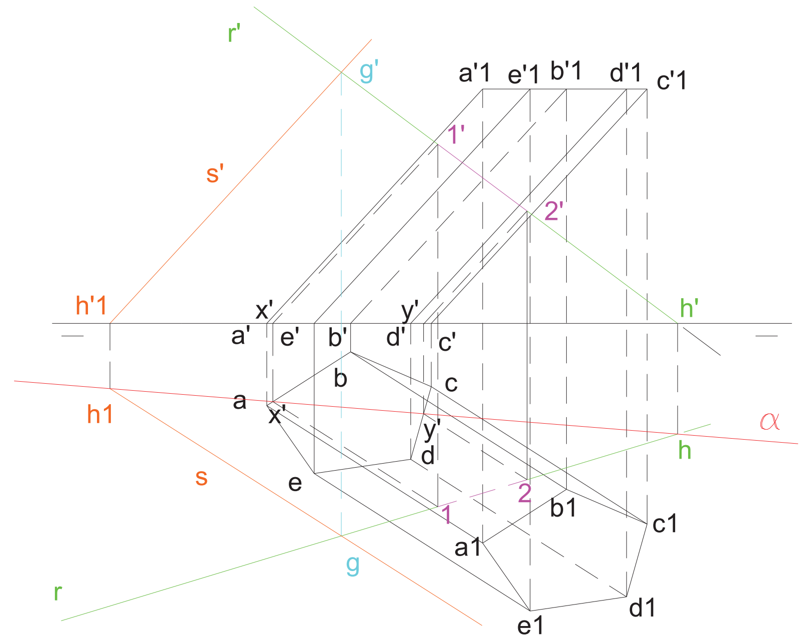


Fig. 236

Se trata de un prisma oblícuo cortado por la recta **r–r'**; hay que determinar su intersección:

1° Por un punto **g–g'** de **r–r'** pasamos una recta **s–s'**, cuyas proyecciones son paralelas a las caras del prisma.

2° Entre las rectas **R** y **S**, se determina el plano secante, del que nos basta determinar la traza horizontal, la que corta a la base del prisma en los puntos **x–x'** y **y–y'**.

3° Trazando por estos últimos puntos, paralelas a las aristas del prisma, se encuentra a la recta **r–r'** en **1–1'** y **2–2'**.

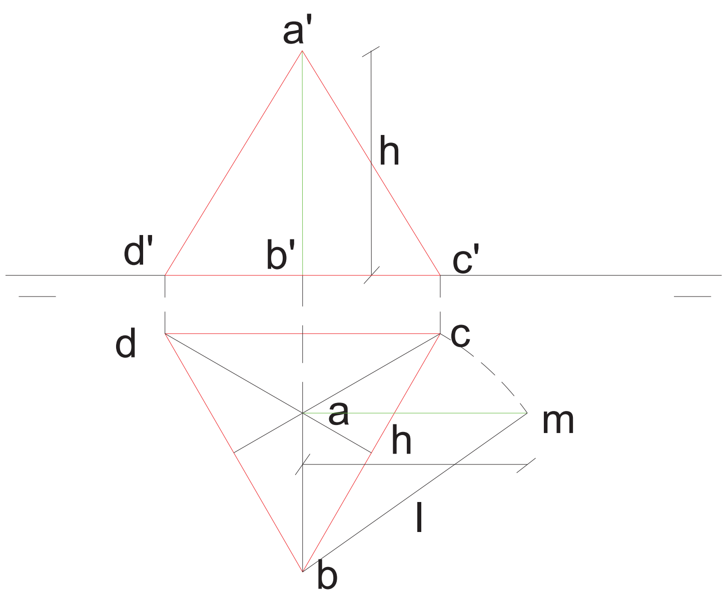


Fig. 237

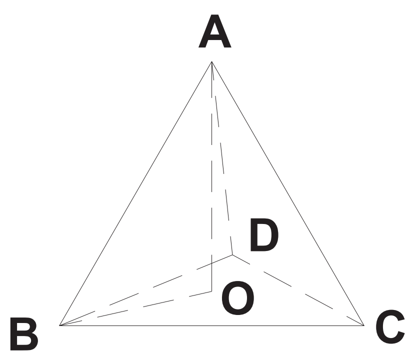


Fig. 238

PIRAMIDE

Tetraedro: En la representación de la figura 237, se trata de uno que esté apoyado, o paralelo al plano horizontal. Se lo ha colocado con una arista **CD** paralela a la línea de tierra. Sobre el horizontal, la base es un triángulo equilátero; para determinar su altura, observar la figura 238, en la que: la altura **AO** es el cateto de un triángulo rectángulo en el que **AB** es hipotenusa y el otro cateto es **BO**, distancia del vértice al centro de la base. Para hallar la altura real, pasando nuevamente a la figura 237, sobre **ab** como un cateto y **am** el otro, y la **hipotenusa = l**, **am** es la altura, que llevando a la proyección vertical, se ubica en **a'**.

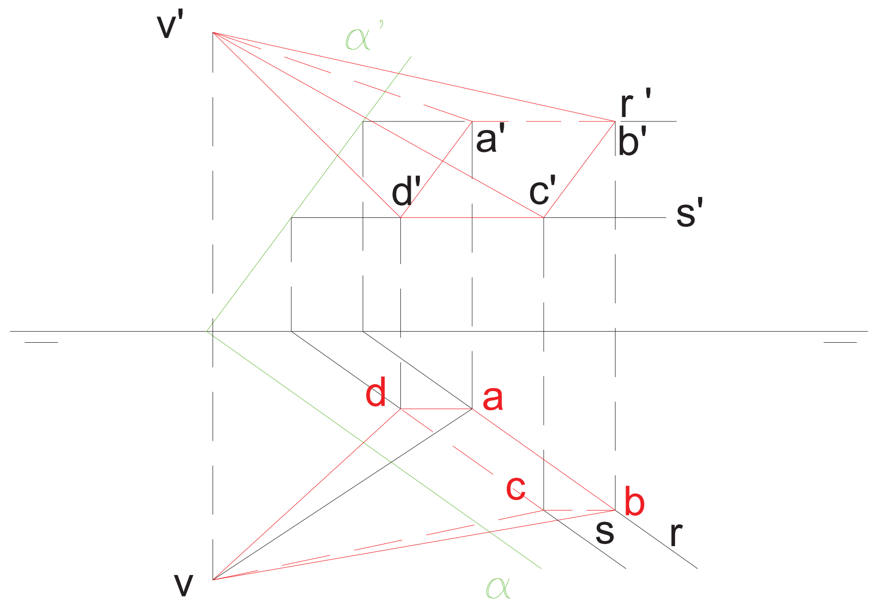


Fig. 239

Representación en el depurado: (fig. 239)

En el plano α, mediante rectas horizontales hacemos contener la base de una pirámide **a b c d–a' b' c' d'**, y luego ubicando arbitrariamente el vértice **v–v'**, unido con los puntos de la base, obtenemos la representación de la pirámide, en este caso de base rectangular.

Representación de un tetraedro conociendo su arista l y el plano sobre el que está apoyada la base:

Los pasos a seguir en el presente ejercicio son: (fig. 240)

1° Determinar la recta V–H **que después de abatida será base para determinar el lado c – b, c' – b'.**

2° Construir un triángulo equilátero arbitrario de lado **AB**, como el **BCD**, que será la cara que se encuentra contenida o apoyada en el plano.

3° El lado BC tiene como centro el punto N. Estos tres puntos los levantamos a las proyecciones de la recta HV, consiguiendo de esta manera los pun.tos bnc – b'n'c'.

4° Trazando las alturas del triángulo, conseguimos el centro geométrico de la base del triángulo, la misma que es el punto O. Desde **D** bajar la perpendicular **DN** y por ella la altura que se levantará desde **n–n'**, sobre la que se ubica el punto **o–o'**; prolongando hasta α que nos da h1 – h'1.

5° Para ubicar el cuarto vértice, levantamos la altura desde **o–o'**, trazando perpendiculares a las trazas; ubicamos un punto x – x ' sobre la perpendicular. Desde **O**, perpendicular a DN, ubicando **DM = CD**; **OM** es la altura.

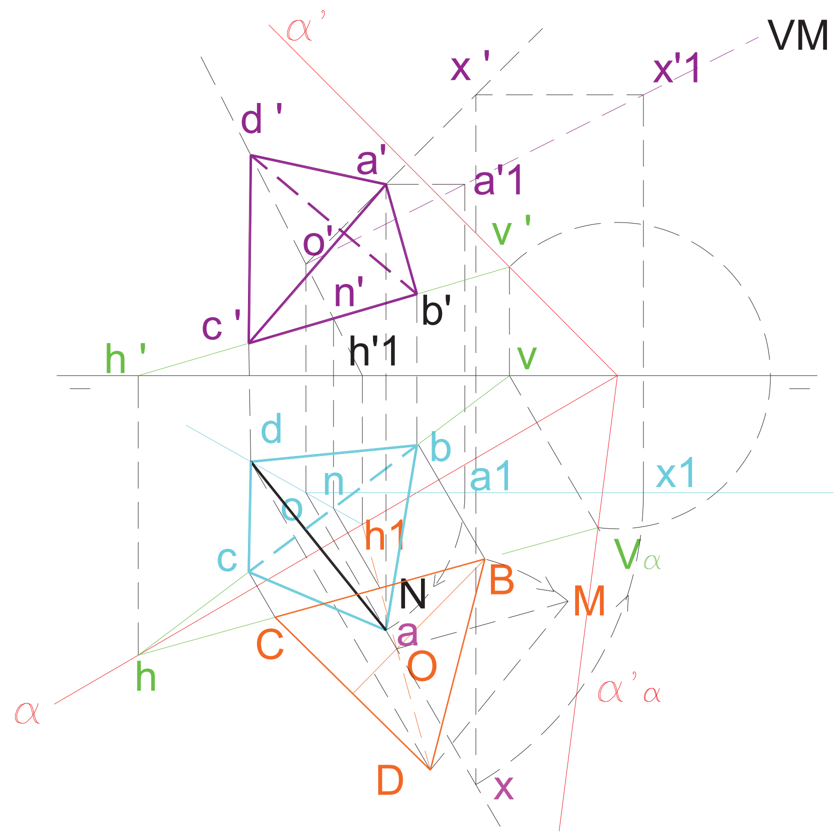


Fig. 240

Para conseguir la altura en representación, giramos sobre o–o' la recta o x, hasta convertirla en frontal según o x1–o' x'1; sobre o' x'1 tomamos la longitud **OM** que será o'–a'1, la misma que rebatida sobre o' – x', da el cuarto vértice a – a'.

Construcción de un octaedro, cuya base cudrada está contenida en el plano α (fig. 241)

Podemos considerar este volumen, como compuesto por dos pirámides de base cuadrada, unidas entre sí por justamente ésta.

- Por similitud con el anterior ejercicio, aplicamos acá los mismos principios aplicados en aquél.

- A través de los procedimientos aplicados en rebatimientos, primero determinamos la base cuadrada del octaedro, apoyada en el plano horizontal.

- Una vez abatido el plano, determinamos el centro **O** del cuadrado, en la diagonal sobre la re**c**ta **B – V1,** y luego la construcción de dicho cuadrado por la aplicación fórmula de Pitágoras. (**d** = $\sqrt{2 \, l \, 2}$)

- El cuadrado de la base es **ABCD.**

- Las proyecciones de este cuadrado las conseguimos levantando las rectas **R** y **DB**. Ellas son las **a' b' c' d'–a b c d.** El vértice **d** lo conseguimos por rebatimiento de la recta DB**.**

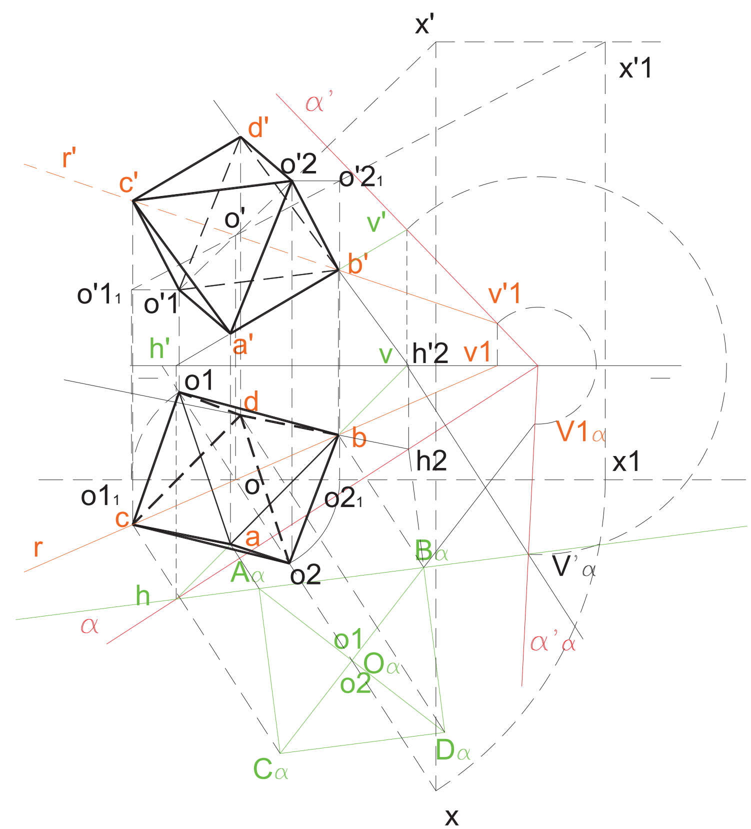


Fig. 241

- **Para encontrar la altura del octaedro, desde o' – o, centro de la base, trazamos la perpendicular al plano a que la contiene. La altura del octaedro estará sobre esta perpendicular. Para ello nos damos un punto auxiliar x' – x sobre esta recta, la misma que sobre un eje imaginario vertical, desde o' – o, la giramos hasta convertirla en frontal, estando en OX la altura en verdadera magnitud.**

- La altura en verdadera magnitud del octaedro, se ve sobre la proyección horizontal **(AD, o BC)**. Para ello, este segmento es llevado a **OX**, determinmando **o1 = o2,** los mismos que por giro inverso, llevamos a las proyecciones de la recta **OX**, encontrando **o1 y o2**, proyecciones de las cúspides opuestas, las mismas que permitirán ver la proyección de la figura tratada en este ejercicio.

Sección plana de la pirámide: (fig. 242) Como en el caso del prisma, por una arista ubicamos un punto de la sección mediante un plano proyectante. Luego por el método de las caras ubicaremos los demás puntos de la sección. El desrrollo de este ejercicio es similar al utilizado con el prisma, por lo que para ver la verdadera magnitud de la sección, proceder como en aquél.

Secciones de una pirámide regular, por planos perpendiculares a los de proyección:

Cuando el plano es perpendicular a los de proyección, se facilita mucho el problema, puesto que puede hallarse directamente la proyección de la intersección del plano con cada una de las aristas laterales de la pirámide (fig. 243). Se hallan las intersecciones con las proyecciones verticales y se refiere al horizontal (caso usar un proyectante vertical).

Cuando el plano es perpendicular al horizontal (o proyectante horizontal) y además la pirámide está apoyada en el plano horizontal, (fig. 244) los puntos extremos del corte están en **o** y **t,** y sus proyecciones verticales, en **o'** y **t'** sobre la línea de tierra.

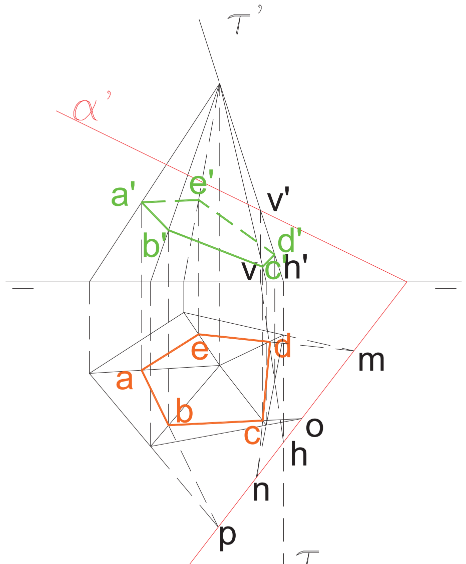


Fig. 242

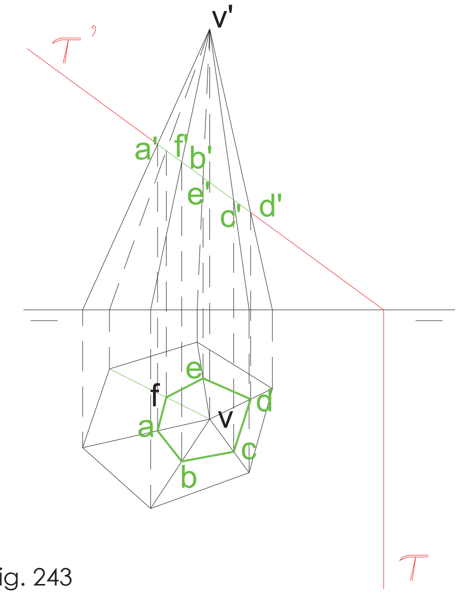


Fig. 243

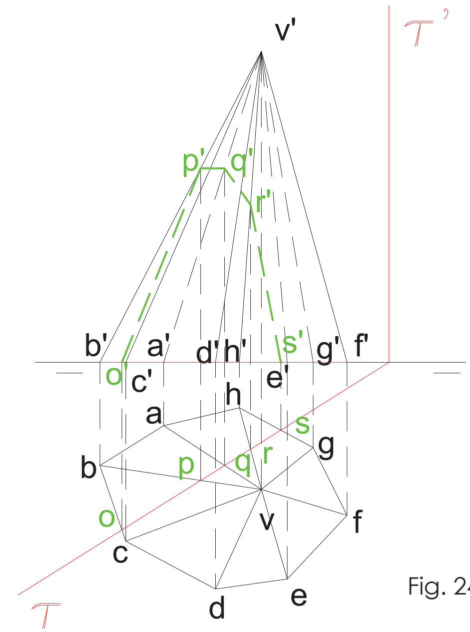


Fig. 244

Intersección de recta con pirámide:

Como plano auxiliar se usa el determinado por la recta **R** y el vértice de la pirámide (fig. 245) que cortará a ésta según las rectas **Va** y **Vb,** cuyas intersecciones con **R,** nos dan los puntos **A** y **B** buscados.

La solución en el depurado será: (fig. 246)

1° Tomamos un punto cualquiera de **r–r'**, el **f–f'**, y hallamos las trazas de la recta **vf**

2° Por **m** y **h,** pasa la traza horizontal del plano α que corta a la base de la pirámide por los puntos **m** y **n.**

3º Las intersecciones de **r–r’** con **mv–m’v’** y **nv–n’v’**, nos da los puntos **m1** y **n1.**

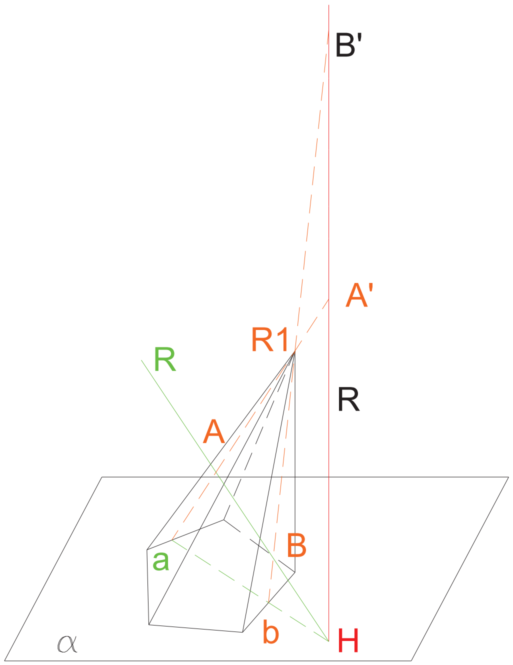


Fig. 245

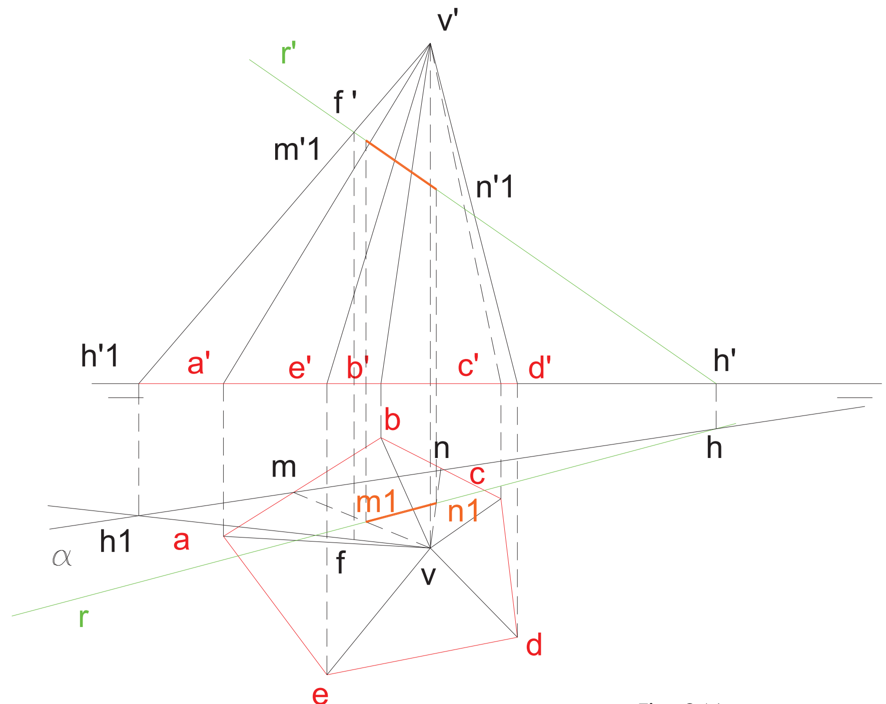


Fig. 246

CONO

Superficie cónica es la engendrada por una recta **G** (fig. 247) que se mueve apoyándose sobre una curva cualquiera **D,** llamada directriz y pasando siempre por un punto fijo **V,** llamado vértice. Son dos superficies, pero generalmente sólo se trata una que suele ser la que contiene a la directriz.

Representación del cono: (fig. 248)

Es muy importante la determinación del contorno aparente. Para determinar una generatriz basta unir un punto arbitrario **m–m'** con el vértice **v–v'**, siendo la recta **v m–v' m',** la proyección de dicha generatriz. La **v n–v' n'**, confunde su proyección vertical con **v m–v' m'**. Del mismo modo ocurre con la que se confunde con la **v m.**

Por tanto existen siempre dos generatrices que responden a esta condición, exceptuando las **va–v'a'** y **vb–v'b'** que son tangentes al círculo de la base. Estas son precisamente las que determinan el contorno aparente del cono. Lo mismo ocurre con las verticales excepto en las **v c–v' c'** y la **v d–v' d'**, que determinan el contorno vertical.

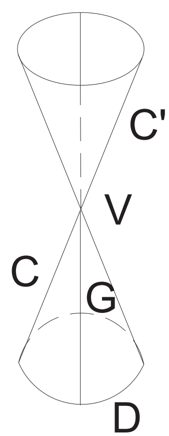


Fig. 247

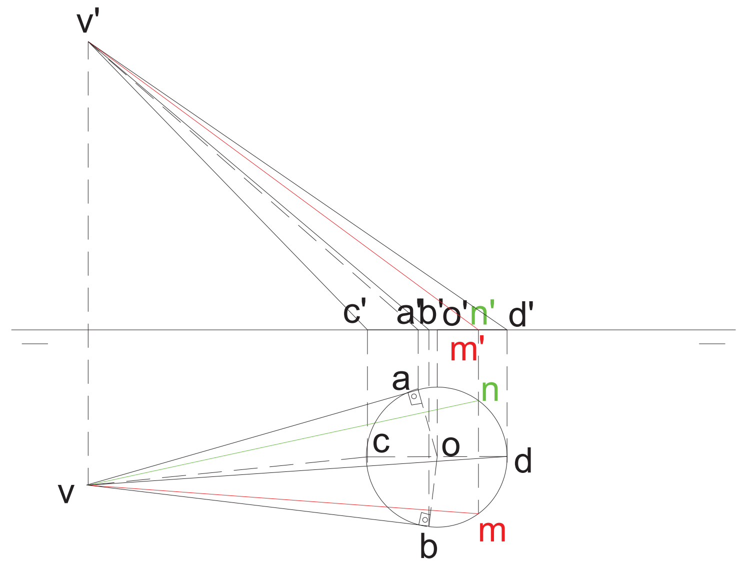


Fig. 248

En la fig. 250 se ve la representaación de un cono oblícuo cuyo vértice se encuentra en su proyección horizontal dentro de la proyección horizontal del círculo de la base del cono.

Proyección de un punto:

Para determinar las proyecciones de un punto situado sobre la superficie cónica, basta determinar una generatriz cualquiera, **v n–v' n'**, figuras 249 y 250, y sobre ella determinar un punto **t–t',** en el caso de la fig. 249. Si se nos da la proyección horizontal del punto (**m**), fig. 250, para hallar la proyección vertical, basta referir el punto a la generatriz que pasa por **n,** determinando así **m'.**

Plano tangente: Se presentan dos casos:

a) Por un punto de la superficie del cono;
b) por un punto exterior al cono.

A) Por un punto de la circunferencia del cono . (fig. 249)

1° Sea **a–a'** el punto dado del cono: trazamos la generatriz **v b–v' b'**, que pasa por él, y por el punto **b–b'**, pasa la tangente **t–t'** a la base del cono.

2° El plano tangente es el determinado por la generatriz **v b–v' b'**, que es al mismo tiempo la traza horizontal.

3° Para hallar la traza vertical **α'** trazamos por el vértice **v–v'**, la horizontal **r–r'** paralela a **t–t',** cuya traza **c–c'** nos determina la traza **α'** del plano.

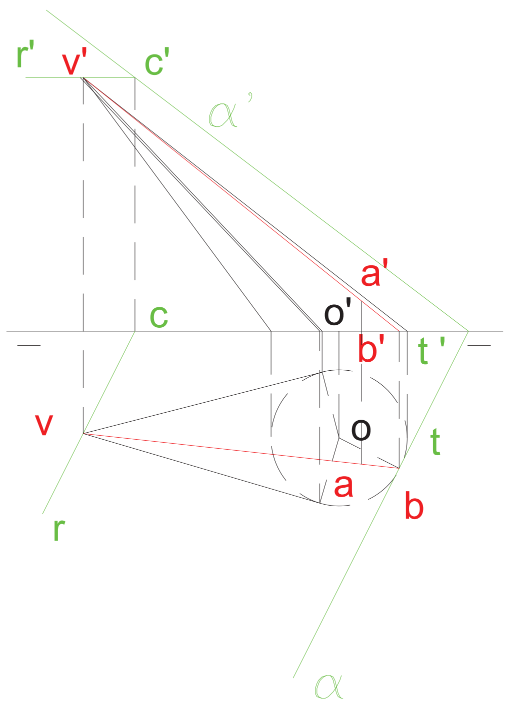


Fig. 249

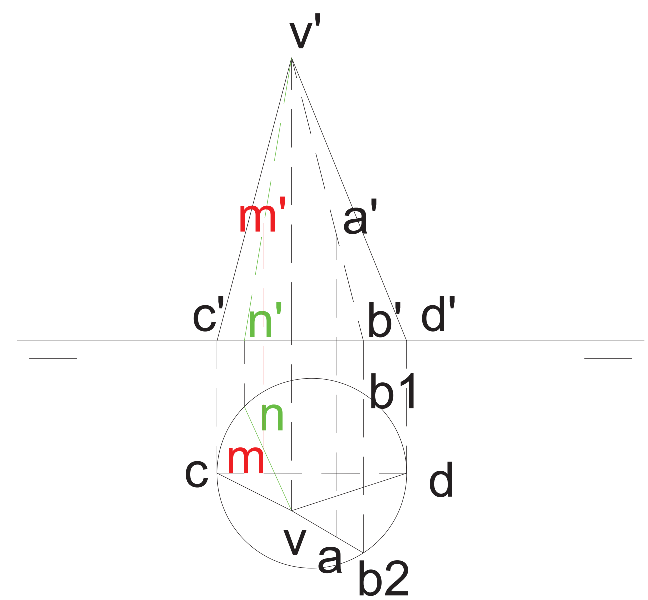


Fig. 250

B) Por un punto exterior a la superficie del cono: (fig. 251)

1° **a–a'** es el punto exterior al cono.

2° Se traza la recta **av–a'v'**, cuya traza horizontal es **h–h'**.

3° Desde **h–h',** tangente a la base del cono, cuyo punto de tangencia nos determina la generatriz de contacto v **b–v' b'.**

4° El plano tangente está determinado por la tangente **h b–h' b',** confundida con la traza horizontal α y la recta **h v–h' v'.**

5° Para hallar la traza vertical α', por **v–v',** trazar una horizontal del plano y por su traza **c–c',** se hará pasar la traza vertical α'.

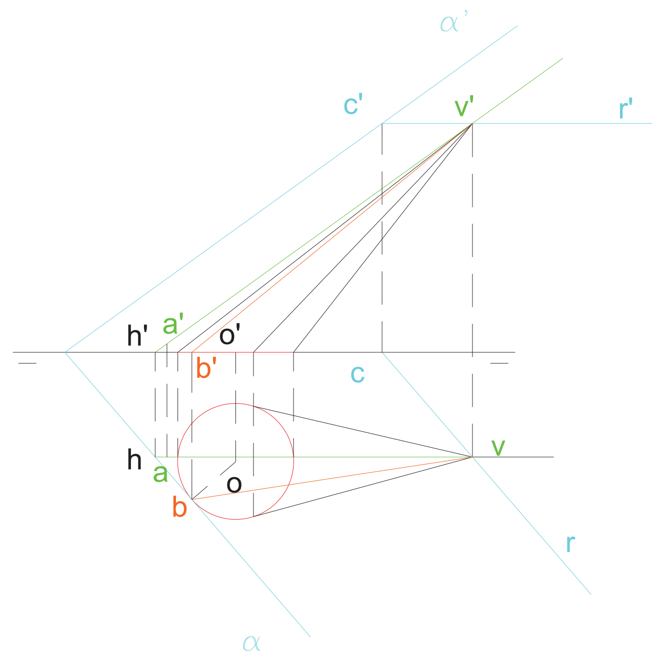


Fig. 251

Secciones planas del cono: (fig. 252)

Si un plano pasa por el vértice **V** del cono, pueden ocurrir tres casos:

a) El plano α no tiene más que un punto de contacto con elcono, que es el vértice **V.**

b) El plano α es tangente a lo largo de la generatriz **G.**

c) El plano α lo corta según dos generatrices: la **g1 y** la **g2**.

Si el plano no pasa por el vértice del cono, también se dan tres casos:

a) Si es paralelo al caso **a** de la figura 252, la sección de corte da una elipse (fig. 253)

b) Si es paralelo al caso **b**, da una parábola.

c) Si es paralelo al caso **c**, da una hipérbola.

Sección producida por un plano de canto: (fig. 254)

Para determinar la sección, basta trazar varias generatrices **v1–v1', v2–v2',** etc., y hallar las intersecciones respectivas, **a, b,** etc. Uniendo las proyecciones horizontales, nos determina una elipse. La proyección vertical se confunde con la traza **α** del plano.

Se puede también determinar la sección por determinación de los ejes de la elipse sección:

1° Hallar la intersección de α'–α con un plano perpendicular a él, trazado por el eje del cono. Es la frontal **f–f'**, o recta de máxima pendiente del plano α que pasa por la proyección horizontal **v** del vértice del cono.

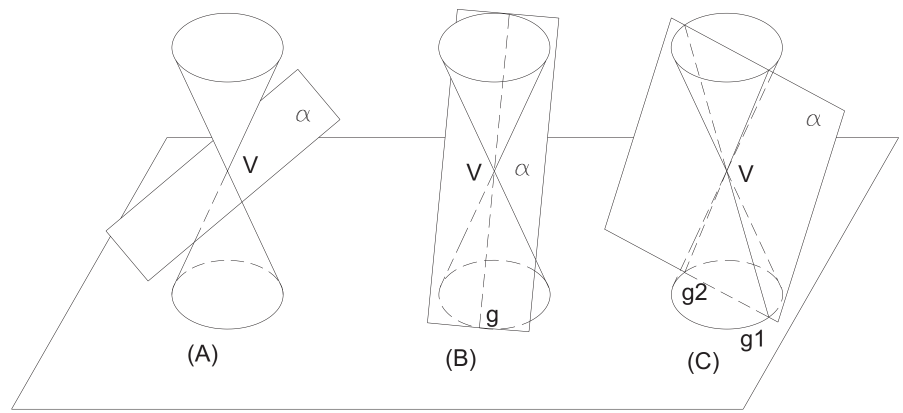


Fig. 252

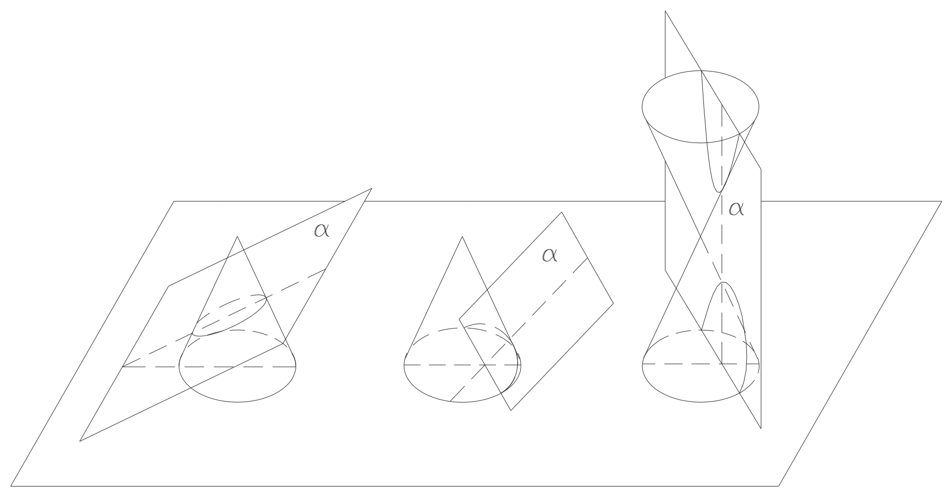


Fig. 253

2° Se hallan las intersecciones **a – a’, b – b’**, de **f – f’** con el plano, es decir con las generatrices **1** y **4**, determinando así el eje mayor **a b – a’ b’** de la elipse proyección y enseguida el centro **o – o’**, como punto medio del eje que no coincidirá por lo general con la intersección de los ejes de la elipse y del cono.

3° El eje menor es la recta perpendicular **a b – a’b’** trazada por el centro **o–o’,** es decir la horizontal **cd–c’d’** del plano **α** que pasa por **o–o’**. Los extremos **c d–c’ d’**, son los puntos de intersección de este eje con el cono. Para determinarlos, pasamos el plano **H’**, cuya intersección es el círculo que se proyecta horizontalmente según el círculo de centro **v** y radio **v–k,** siendo **k–k’** la intersección de **H’** con la generatriz **v4** del contorno aparente. La intersección de este círculo con **cd**

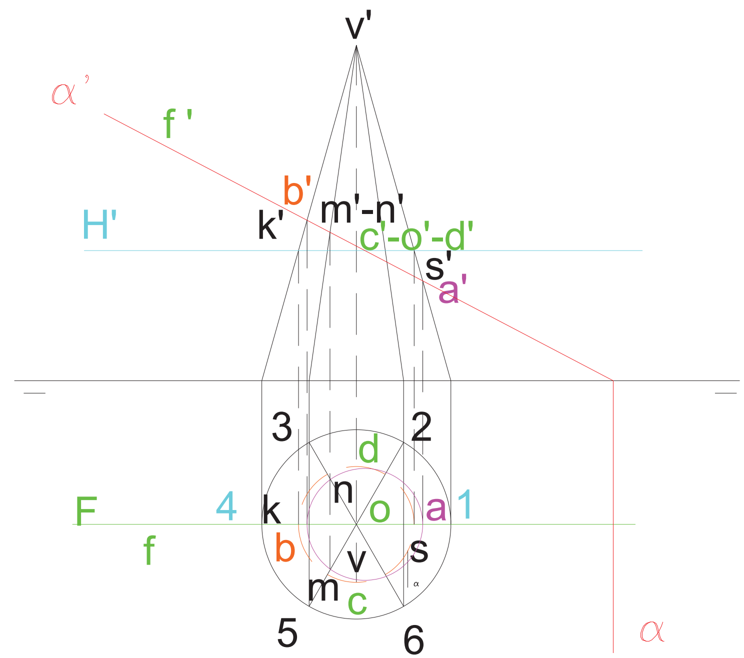


Fig. 254

Intersección de recta y cono: (fig. 255 y 256)

Nos auxiliamos de un plano α que pase por el vértice del cono, determinando con el plano base del cono β**,** una recta de intersección que corta a la base en los puntos **A** y **B.** Uniendo los puntos hallados con el vértice **V**, encontramos a la recta **R** en los puntos **M** y **N** que son los puntos de intersección de la recta **R** con el cono.

En el depurado:

1° Encontramos las trazas de la recta en **h–h'.**

2° Ubicando un punto **c–c'** en **R**, y unido con **V,** da la recta **Vc**, cuyas trazas con las de **R**, nos da **α**, que corta a la 1base del cono en **a** y **b,** los mismos que unidos con **V**, determinan finalmente **M** y **N** en la recta **R**.

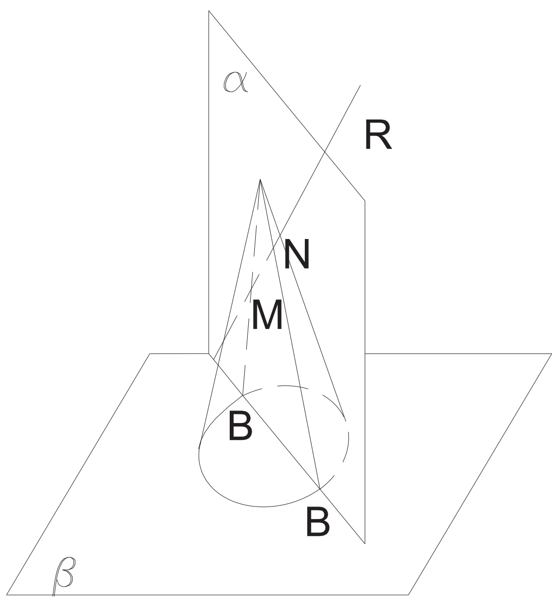


Fig. 255

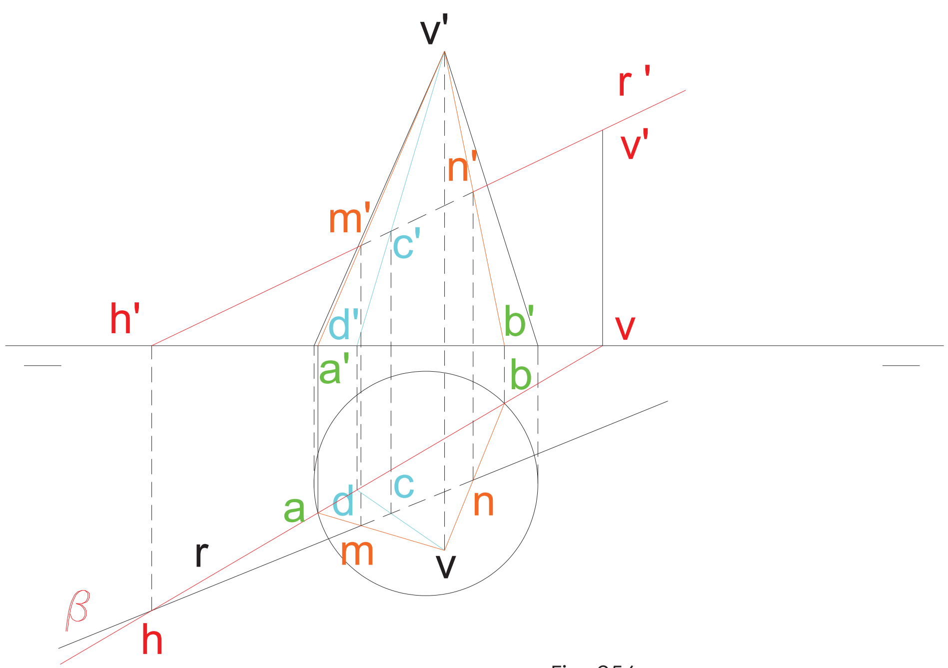


Fig. 256

CILINDRO

Viene a ser un cono cuyo vértice se encuentra en el infinito. Queda engendrado por una recta generatriz que se mueve según una directriz que es el círculo de la base.

El eje del cilindro queda determinado por una recta paralela a las generatrices que une los centros de las bases. Puede ser recto u oblícuo.

Representación:

Supongámoslo apoyado en el plano horizontal. (fig. 257)

El contorno aparente horizontal viene determinado por las tangentes **a a1–a' a1'** y **b b1–b' b1'** a las proyecciones horizontales de los c'rculos de la base, de centro **o** y **o1.** Estas tangentes son paralelas a las proyecciones del eje **o o'–o1 o1' .**

Las generatrices del contorno aparente vertical son las **c c1–c' c1'** y **d d1–d' d1'**.

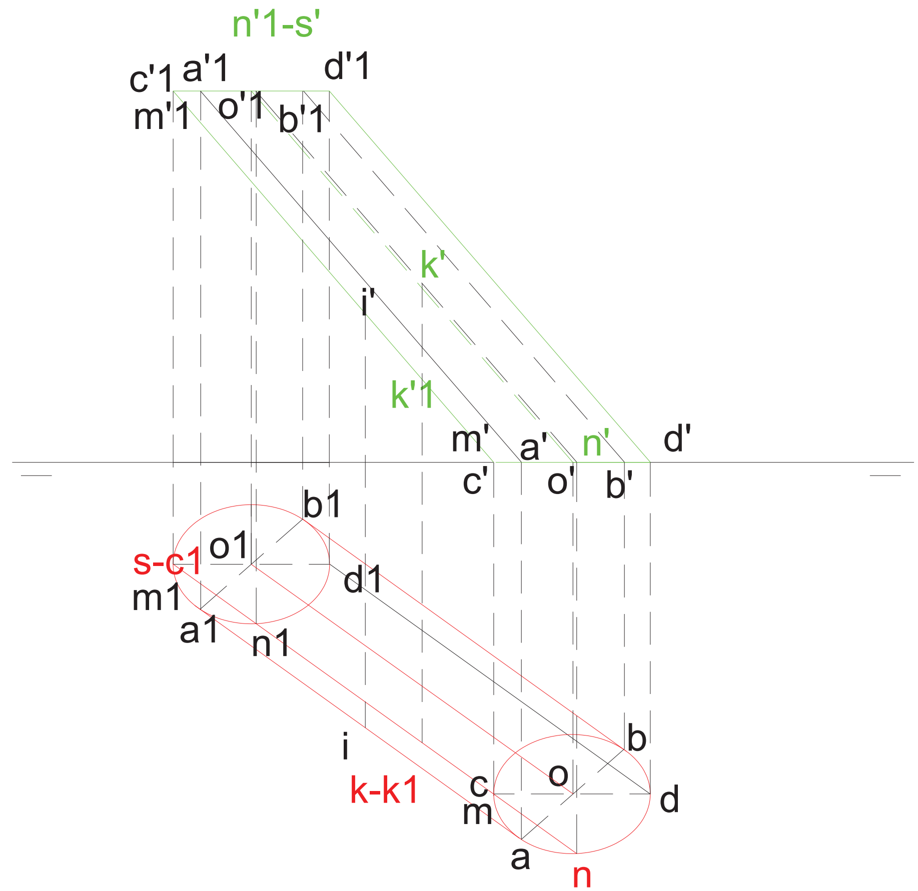


Fig. 257

Proyecciones de un punto:

Para conocer las proyecciones de un punto del cilindro, basta trazar una generatriz cualquiera de éste y tomar en ella un punto arbitrario. En el caso de la figura 257 se elige un punto **n–n'** y por él se traza la generatriz **n s–n' s'.** Cualquier punto de ella como el **k–k'**, pertence a la superficie del cilindro.

A la inversa: si conocemos un punto **K,** por él trazamos una paralela al eje, **k–n,** y nos determina dos generatrices: **m–t** y **n–s,** con lo que se obtiene los puntos **k** y **k1.**

Si la proyección se encuentra sobre el contorno aparente, como el caso del punto **i–i'**, no hay más que un punto, y si finalmente la proyección dada se encuentra fuera de la proyección horizontal del contorno, no existe ningún punto de la superficie que cumpla con esta condición.

Plano tangente: (fig. 258)

Por un punto **D**, trazamos la generatriz **CB** que corta a la base en **B**. Esta generatriz y la tangente **BH,** determinan el plano α tangente.

Si el punto **A** fuera exterior, se traza una paralela a la generatriz, hallar la intersección **H** con el plano de la base; esta paralela y la tengente **BH** determina el plano α tangente.

Aplicación al sistema diédrico en el depurado: (fig. 259)

Se trata de un cilindro oblícuo apoyado en el plano horizontal: los pasos a seguir para la resolucioón del presente problema son:

1° Por **d–d'**, la generatriz **c b–c' b'**, y enseguida la tangente por **b** a la base del plano que se confunde con la traza α del plano tangente.

2º Para hallar la otra traza del plano tangente, nos auxiliamos de las horizontales del plano por **c** y **d** (rectas **R** y **S**).

3º Si el punto es exterior, por **a–a',** una paralela a las generatrices hasta unir con **h–h' .**

4º Desde su traza **h–h',** las tangentes **h b–h' b'** a la proyección horizontal de la base.

5º Ambas rectas nos determinan al plano α cuya traza horizontal se confunde con la tangente **h b.**

6º La traza vertical se determina con la unión de las trazas verticales de las rectas **R** y **S.**

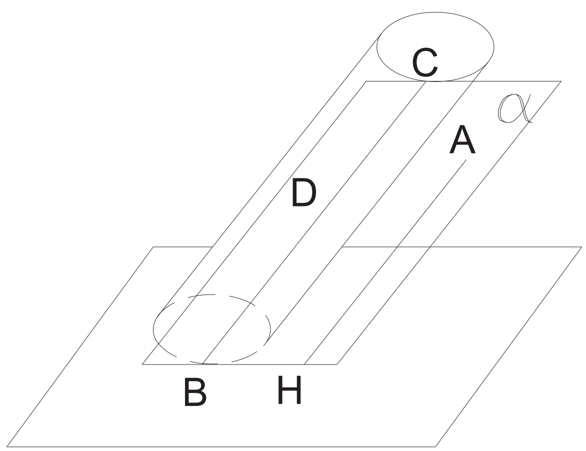


Fig. 258

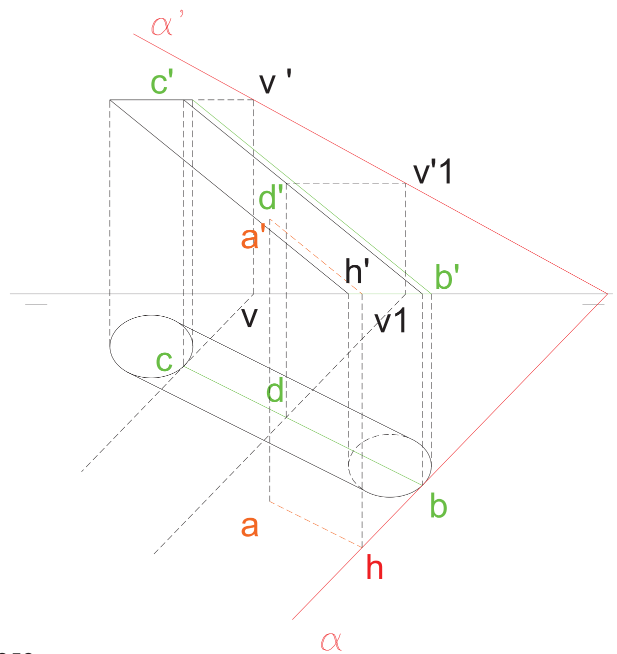


Fig. 259

Secciones planas:

Todo plano secante puede ser paralelo al eje, o que lo corte. En el primer caso cortará según dos generatrices, o una, si es tangente. Si es secante oblícuamente, cortará a todas las generatrices y la sección será una elipse. (fig. 260)

El eje mayor de la elipse es **AB** que corta al eje **E** del cilindro y es perpendicular a la traza **T** del plano secante β y el β de la base del cilindro. Las intersecciones **A** y **B** del eje con la superficie cilíndrica son los vértices. El eje menor **CD** es paralelo a **T** trazado por el punto medio. Ambos se proyectan en **a b** y **c d**, perpendicular o paralelo a la traza **T.**

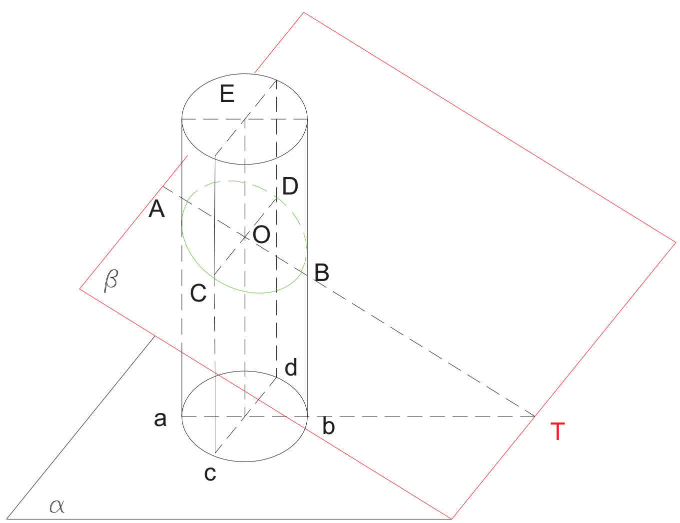


Fig. 260

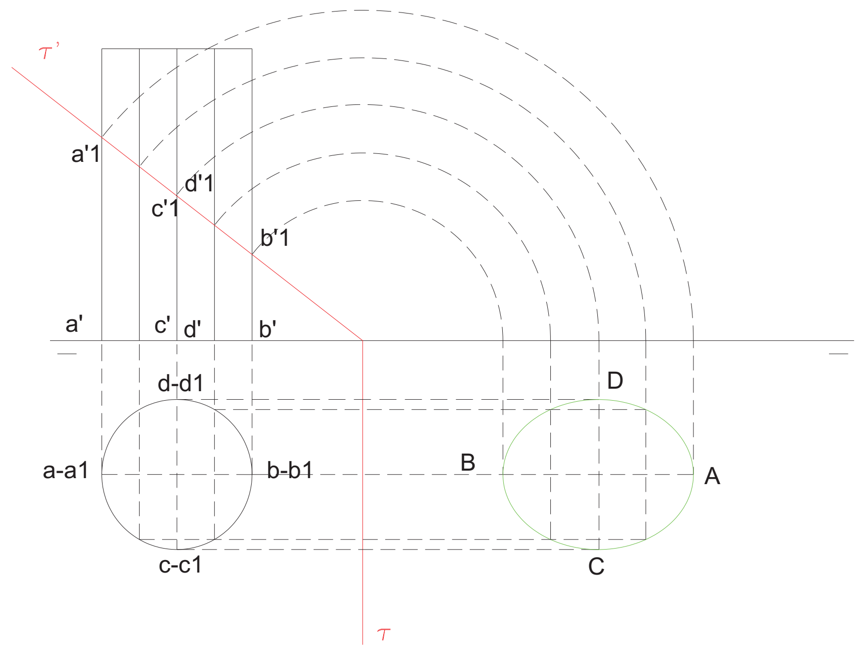


Fig. 261

Sección por un plano de canto: (fig. 261)

El cilindro tiene una de sus bases en el plano horizontal. Su proyección horizontal queda confundida con la circunferencia de la base, y su proyección vertical, coincide con la traza del plano.

Para conocer la verdadera magnitud de la sección, se abate ésta sobre el plano horizontal.

Intersección de recta y cilindro: (fig. 262)

Se traza por la recta, un plano auxiliar que corta al cilindro paralelamente a las generatrices. Al elegirlo, hay que hacerlo de modo que corte el cilindro según dos generatrices.

E, es la recta. Por un punto cualquiera **C** de ella, se traza una paralela a la generatriz **CH,** que con la recta **R,** genera al plano β .

Se hallan enseguida las generatrices **NB** y **MA** de intersección con el plano β y el cilindro. Los puntos **M** y **N** son los buscados.

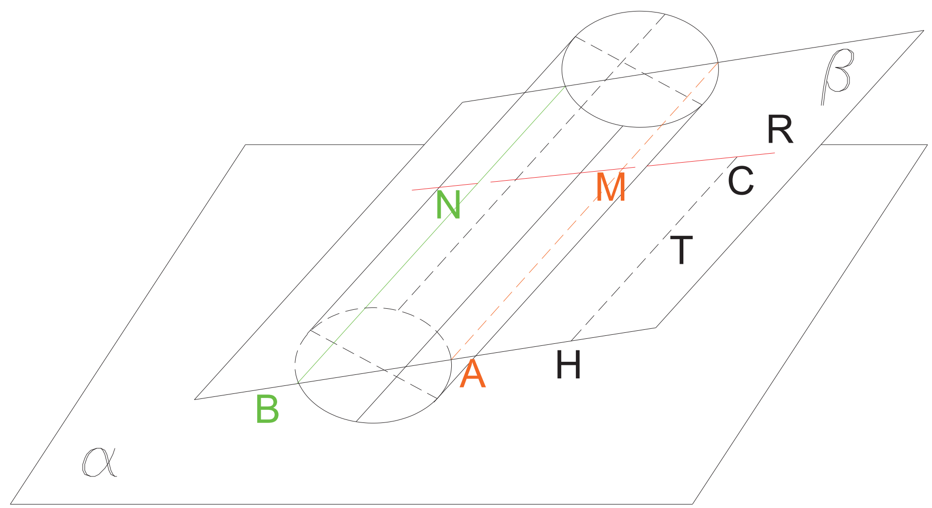


Fig. 262

Solución en el depurado: (fig. 263)

Los pasos a seguir son:

1° Por un punto **C** de **R,** una paralela a las generatrices hallando sus trazas en **h1** y **h1'**, que unidas a las trazas de **R**, **h–h'**, nos determinan la traza **α** del plano.

2º El plano corta a la base en los puntos **A** y **B,** desde donde levantamos paralelas a las genertarices, las que cortan a la recta **R** en los puntos **M** y **N**, que son los buscados.

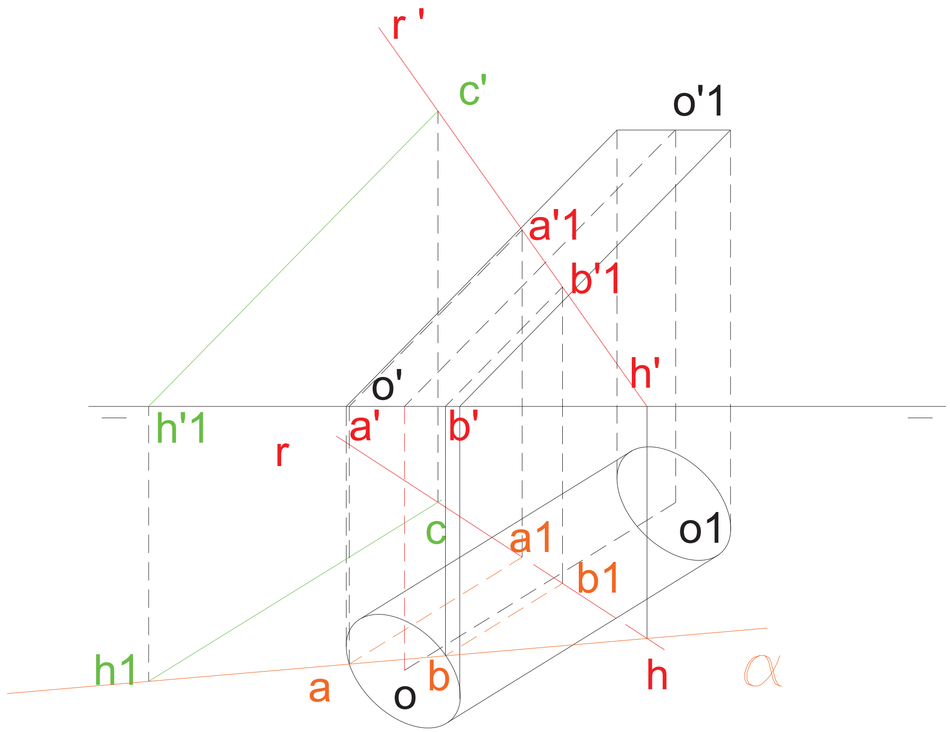


Fig. 263

ESFERA

Representación:

Sea **o – o'** el centro de la esfera de radio **R.** Las proyecciones de la esfera vienen dadas por los contornos aparentes horizontal y vertical, rerresque en el caso de la figura 264, son los círculos máximos **n – n'** y **m – m'**, paralelos al plano horizontal y vertical respectivamente.

El contorno aparente horizontal, es la línea de tangencia de la esfera con un cilindro que la contiene con generatrices perpendiculares al plano horizontal. Esta línea de contorno es el círculo máximo horizontal **n – n'** que se proyecta horizontalmente según la circunferencia **n** de centro **O** y radio **R**, y verticalmente según el diámetro **n'** paralelo a la línea de tierra. De la misma manera el contorno aparente vertical es el círculo máximo **m – m',** paralelo al plano vertical que se proyecta verticalmente según la circunferencia **m'** de centro **o'** y radio **r'**, y horizonalmente según el diámetro m paralelo a la linea e tierra.

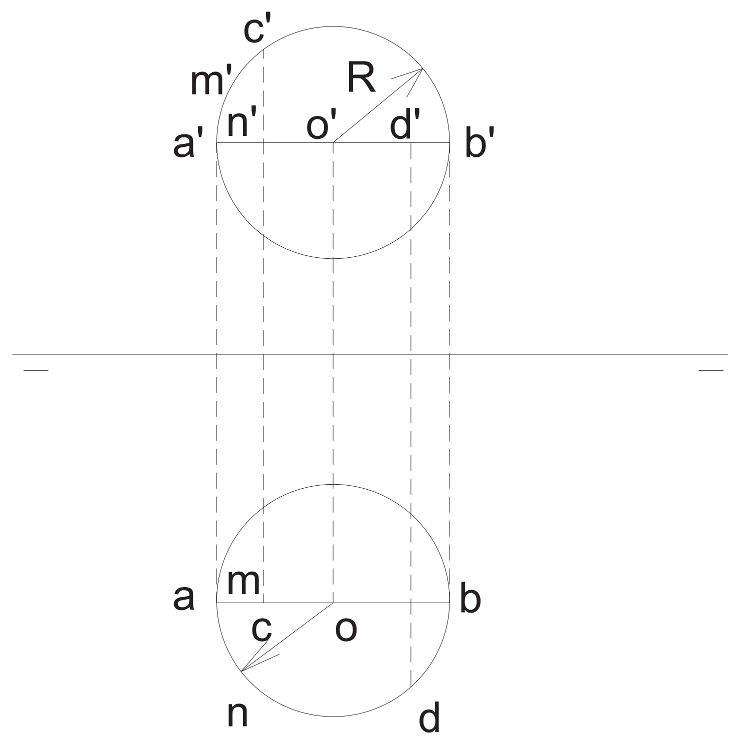


Fig. 264

Representación de un punto:

Si la proyección vertical **c'** de un punto de la esfera se encuentra situado en la circunferencia **m'** del contorno aparente vertical, su proyección horizontal **c,** se hallará refiriendo aquélla al diámetro **m,** paralelo a la línea de tierra.

Si conocemos la proyección horizontal **d,** situada en la circunferencia **n,** contorno aparente horizontal, la referimos a la proyección vertical **n'**, obteniendo así la otra proyección **d'**.

Plano tangente a la esfera:

El plano tangente a la esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia. Por eso si se quiere trazar un plano que sea tangente a la esfera en un punto de ella, bastará trazar el radio que pase por dicho punto y enseguida el plano perpendicular a éste y que pase por el punto. (fig. 265)

En la figura 265, para trazar el plano tangente a la esfera, por el punto **a – a'** en la superficie esférica, se traza el radio

oa – o'a', y por su extremo **a – a'**, el plano perpendicular al mismo, valiéndose de la horizontal **r – r'**, por cuya traza vertical **v – v'**, pasará el plano tangente α.

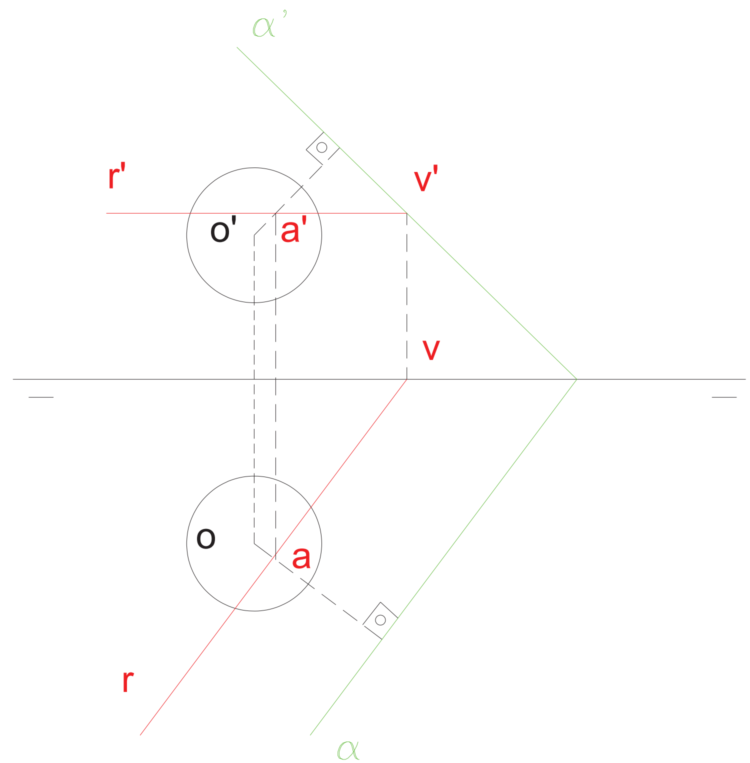


Fig. 265

Intersección de recta con esfera:

El procedimiento a seguir en este caso, es similar al utilizado en los otros cuerpos, es decir, por un plano que pase por la recta en cuestión.

El plano convendrá sea elegido de modo que dé una sección fácil de determinar, para lo cual se utilizará uno de los planos proyectantes de la recta.

Si la recta fuera horizontal (fig. 266), el plano auxiliar será el proyectante vertical, que en este caso será el plano horizontal α'. La sección producida en la esfera por el plano α será el β cuya proyección horizontal β**,** corta a la recta **r – r'** en los puntos **m** y **n,** que referidos a la proyección vertical serán **m'** y **n'**, intersección de la recta con la superficie esférica

Si la recta dada es cualquiera, se utilizará uno de sus planos proyectantes como plano auxiliar, el cual cortará a la esfera, según un círculo menor cuyas proyecciones se sabe hallar; pero como una de estas proyecciones será generalmente una elipse, podemos evitarnos el trazado de ésta, siguiendo el procedimiento indicado en la figura 267, en la que la recta dada es la **r–r'.**

Consiste este procedimiento en girar el plano proyectante auxiliar α (no se ha dibujado la traza α'), alrededor del diámetro vertical de la esfera, hasta convertirlo en el plano α**1** paralelo al vertical. La recta dada, al girar el plano, ocupará la posición **r1–r1'**, determinada por el giro de dos de sus puntos, **a–a'** y **b–b',** cuyas nuevas posiciones son **a1–a1'** y **b1–b1'.** Como se ve, las proyectantes horizontales de los puntos girados, son precisamente las intersecciones de **r** con la proyección horizontal del contorno aparente horizontal de la esfera, lo cual simplifica la construcción.

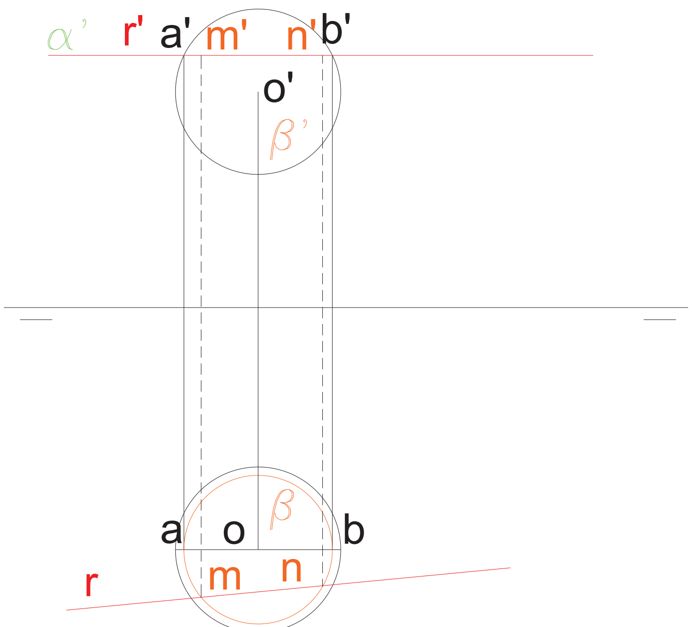


Fig. 266

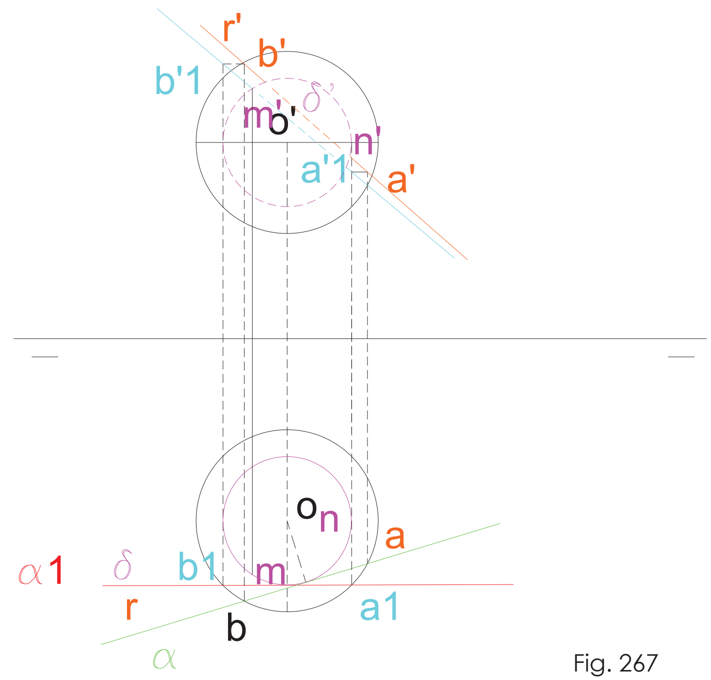


Fig. 267

El plano girado α**1** corta a la esfera, según el círculo δ, cuya proyección vertical δ' corta a **r1'** en los puntos **m1'** y **n1'**. Deshaciendo el giro, es decir trazando por estos puntos, paralelas a la línea de tierra, éstas cortarán a **r'** en los puntos **m'** y **n',** que referidos a la proyección horizontal **r,** nos dan las proyecciones horizontales **m** y **n** de los puntos buscados, **m–m'** y **n–n'.**

Si conocemos la proyección horizontal **d,** situada en la circunferencia **n,** contorno aparente horizontal, la referimos a la proyección vertical **n'**, obteniendo así la otra proyección **d'**.

EJERCICIOS DE SECCIONES EN VERDADERA MAGNITUD

1.- Encontrar la verdadera magnitud de la sección de un prisma, cortado por un plano oblicuo. (fig. VM1)

- Se trata de un prisma hexagonal cuya base está apoyada en el plano horizontal, cortado por el plano α' – α**.**

- Como primera medida, tenemos que encontrar la sección producida en el prisma por el plano secante, para lo que, empleando el procedimiento de la ley de afinidad, ubicaremos el primer punto de la sección mediante el uso de un plano proyectante τ' – τ**,** que pase por la arista d'–d; ambos planos al cortarse, nos dan una recta de intersección v–h, que determina el punto 1 en la intersección de ésta con la arista d.

- A partir del punto 1 obtenido en el paso anterior, se procede a buscar el segundo ó 2, para lo que prolongamos la arista d–e hasta la traza horizontal α**,** en donde marcamos el punto R (traza horizontal de dicha recta), el mismo que unido al punto 1 de la arista d, nos permite encontrar el 2 en la arista e.

- Similar procedimiento hacemos con la arista de la base e – f, que corta a α en P, que unido con el punto 2, permite encontrar el 3 en la arista f.

- Alargando la arista a – f de la base, encontramos a la traza horizontal α, del plano, ubicamos en ella el punto S, que unido a 3, permite encontrar el punto 4 en la arista a.

- Para hallar el punto 5, prolongamos la arista a–b de la base, ubicando el punto T en α, que unido con 4 y siguiendo su dirección hasta la arista b, permite ubicarlo en ella.

- Para ubicar finalmente el punto 6, se prolonga b–c, hasta encontrar U, que unido con 5, permite encontrarlo en la arista b.

- El procedimiento que sigue, consiste en unir los seis puntos de la intersección, dándonos la figura hexagonal de la sección, la misma que a continuación deberá verse en verdadera magnitud, para lo que en este ejercicio utilizaremos el método de abatimientos.

- Se procederá a abatir el plano sobre su traza horizontal como charnela, para lo que a partir de cualquier proyección horizontal de las distintas trazas verticales de las rectas que forman la base del prisma apoyada sobre el plano horizontal, se traza una perpendicular a la charnela, y desde su correspondiente proyección vertical de su traza vertical, se construye un arco con centro en la intersección de las trazas del plano con la línea de tierra, hasta cortar la perpendicular mencionada, que es por donde tomará la dirección la traza vertical abatida del plano desde la intersección antes menciolnada.

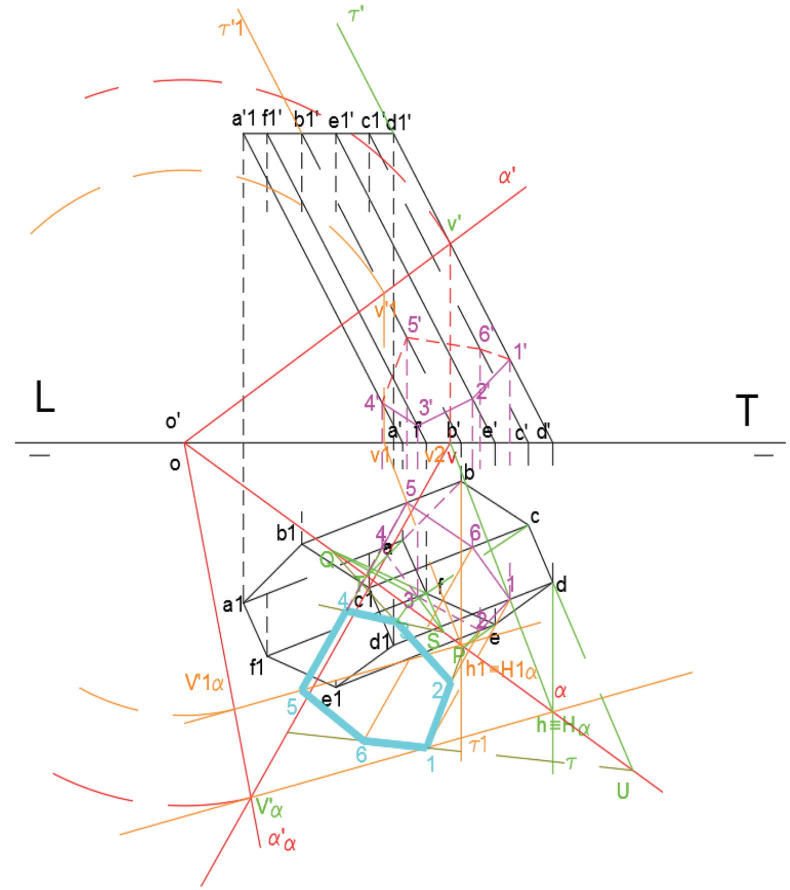


Fig. VM1

- Como las trazas horizontales de las rectas que determinaron la figura sección, ya se han encontrado (R, P, S, T, U,), basta unir éstas con sus respectivas trazas verticales abatidas sobre la traza abatida del plano ($\alpha'\alpha$): R con V1α, S con V4α, T con V5α, U con V6α. Todas estas rectas se estánviendo en verdadera magnitud.

- Seguidamente, desde cada uno de los vértices de la sección obtenida (1, 2, 3, 4, 5, 6), se trazará perpendiculares a la charnela, hasta encontrar las mencionadas rectas abatidas en el párrafo anterior, encontrando de esta manera la ubicación definitiva de los puntos de la sección vistos en verdadera magnitud: es lo que resulta al ver la sección con línea más gruesa que el resto del dibujo.

2.- Exactamente a los datos del ejercicio anterior, aplicar para encontrar la sección en verdadera magnitud, el procedimiento de cambio de planos. (fig. VM2)

- Como primera medida, debido a que el prisma es de las mismas características que las del ejercicio

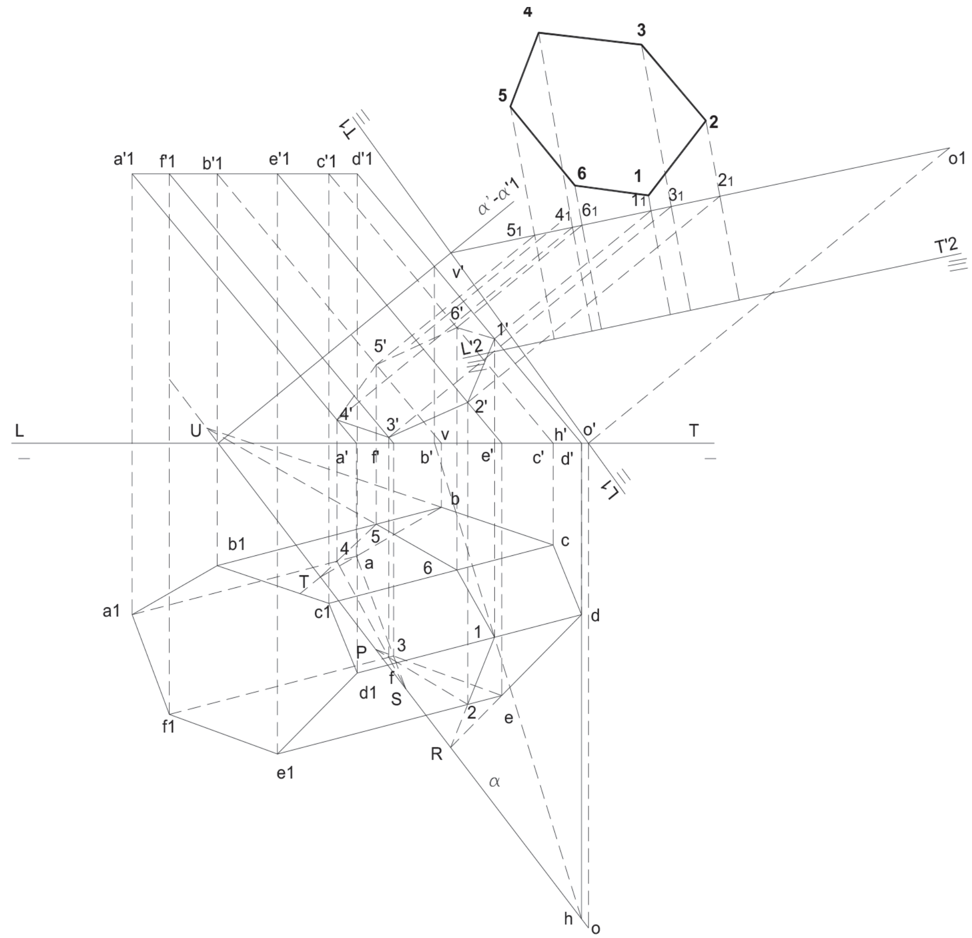


Fig. VM2

anterior, aplicando la ley de afinidad, se encontrará la sección determinada por el plano secante α**'–** α , la misma que está determinada por los puntos : 1'–1, 2'–2, 3'–3, 4'–4, 5'–5, 6'–6.

- El trabajo a seguir es, mediante el procedimiento de cambio de planos, encontrar la verdadera magnitud de la sección; para ello, como primer paso, vamos a convertir al plano, en proyectante vertical, utilizando un cambio de plano horizontal, colocando la L1–T1, perpendicular a la traza vertical α' del plano, la misma que pasa a llamarse α**'1.**

- Para encontrar la nueva traza horizontal, realizamos la operación tratada en otros ejercicios, a través del punto de intersección de las dos líneas de tierra: la L1–T1, y la L–T. Por lo tanto desde la intersección de L1–T1, con α**'1**,unimos con o1 debajo de su respectiva línea de tierra (o, se encontraba debajo de la suya).

- Al ser el cambio de plano, horizontal, son las proyecciones verticales las que no cambian de nombre (sólo de subíndice), por lo que desde ellas se trazan perpendiculares a la nueva línea de tierra, hasta cortar a la nueva traza horizontal α**1**, en donde se encontrarán las nuevas proyecciones verticales de la sección resultante en el corte del prisma por el plano oblicuo.

- Mediante un segundo cambio de plano (vertical: L'2–T'2), paralelo a la traza horizontal α**1**, obtendremos las proyecciones finales de la sección, llevando a esta últim línea de tierra las cotas de las proyecciones verticales con subíndice 1 en el primer cambio de planos.

3.- El mismo tipo de objetivo buscado en los dos ejercicios anteriores, tratar de conseguirlo por el procedimiento : "verdadera magnitud por giros". (fig. VM3)

- Como en los dos ejercicios anteriores, primero conseguiremos la sección determinada en el prisma por el plano secante α**'–** α, la misma que está determinada por los vértices encontrados y denominados por los números 1'–1, 2'–2, 3'–3, 4'–4, 5'–5 y 6'–6.

- Mediante un primer giro, convertimos al plano en proyectante vertical, para lo que utilizaremos un eje vertical e'2–e2, que se cortará para el efecto con la recta horizontal del plano, la r'–r; desde la traza horizontal e2 de la recta vertical, se traza una perpendicular a la traza horizontal α del plano, y con centro en e2, y radio, la intersección de la perpendicular mencionada con la traza α, giramos ésta hasta colocarla perpendicular a la línea de tierra; para encontrar la dirección que tomará la traza vertical del plano, después de este primer giro, la traza verticalv’1 de la horizontal auxiliar, se moverá paralelamente a la línea de tierra, hasta encontrarse con la prolongación de r1, (que se puso perpendicular a la línea de tierra, pues debe seguir siendo paralela a la nueva traza horizontal α**1**), en donde estará la nueva proyección de su traza vertical, v’2, que es en definitiva por donde pasará la nueva traza vertical α**’2** del plano.

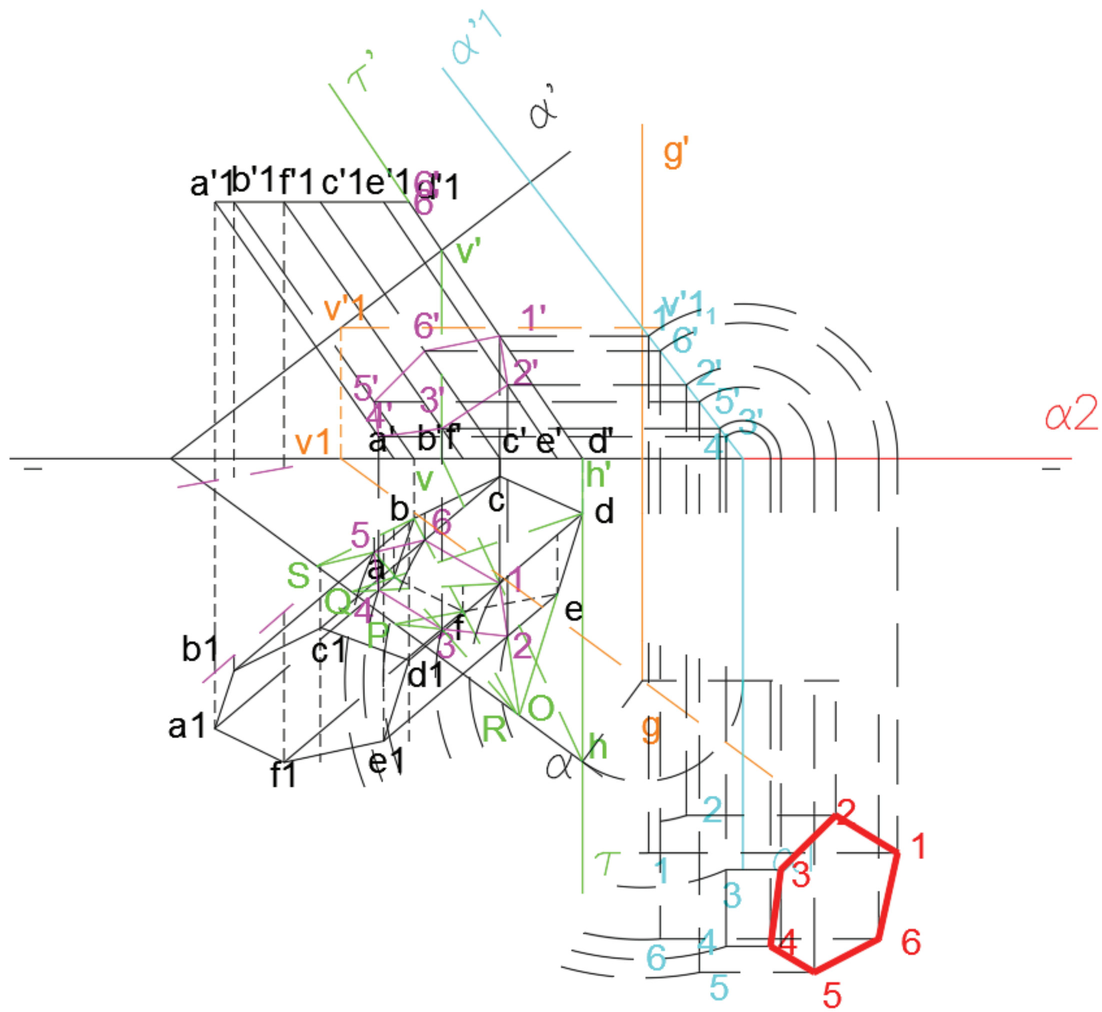


Fig. VM3

- Las nuevas proyecciones verticales de la sección (las que tendrán subíndice 1), deben estar coincidentes con α**'1**, para lo que desde sus primitivas proyecciones verticales, se las llevará a aquélla mediante paralelas a la línea de tierra, hasta encontrarla.

- Las proyecciones horizontales estarán afectadas por el mismo giro que realizó la traza horizontal α del plano, por lo que haciendo centro en e2, giramos éstas hasta cortar las perpendiculares bajadas desde las proyecciones verticales afectadas por el subíndice 1.

- Mediante un segundo giro, esta vez alrededor de la recta de punta e'3–e3, colocamos al plano en posición de horizontal, (α**'2**, paralelo al plano horizontal de proyección) lo que nos permitirá ver la figura obtenida, en verdadera magnitud; las proyecciones verticales que se encontraban sobre α**'1**, estarán por lógica sobre α**'2**, así que bajando perpendiculares desde éstas, a la línea de tierra, hasta encontrarse con las paralelas a la línea de tierra, desde las proyecciones horizontales encontradas en el anterior giro, se obtendrá las posiciones finales de la sección, vistas en verdadera magnitud.

- La sección buscada, es la representada en el gráfico adjunto con línea más gruesa que el resto: **1–2–3–4–5–6.**

4.- Encontrar la verdadera magnitud de la sección producida en una pirámide por un plano oblicuo, teniendo en cuenta que aquélla se encuentra apoyada en el plano horizontal de proyección. (fig. VM4)

- Se trata de la pirámide de base pentagonal a–b–c–d–e, cuyas proyecciones verticales a'–b'–c'–d'–e', se encontrarán en la línea de tierra.

- El plano secante es el α' – α, el que va a producir en la pirámide, la sección 1–2–3–4–5, encontrada mediante el procedimiento de la ley de afinidad,partiendo de la intersección del plano proyectante vertical auxiliar τ' – τ, con la arista lateral c'–c, que precisamente determinará el primer punto (el 1), de la intersección.

- La prolongación de la arista c–d, de la base, corta a la traza horizontal α, del plano, en el punto O, que unido con el punto 1 de la arista levantada por c, determinará el segundo punto, el 2.

- Prolongando la arista d–e hasta la traza horizontal del plano, encontramos P, que unido con 2, determinará el tercer punto de la sección, el 3.

- La prolongación de la arista a–e de la base, encuentra a la traza horizontal del plano, en el punto R, desde donde unimos con el 3, prolongando hasta la arista que pasa por a, hallando así el cuarto punto , el 4.

- El quinto punto de la intersección se encuentra a partir de la prolongación de la arista a–b, hasta la traza horizontal en el punto S, desde donde uniendo con el punto 4, de la misma forma que en los anteriores, encontramos el punto 5 en la arista que pasa por a.

- Una vez determinadas las dos proyecciones de la sección (las verticales se encuentran por simple levantamiento de las proyecciones horizontales de la sección, hasta sus

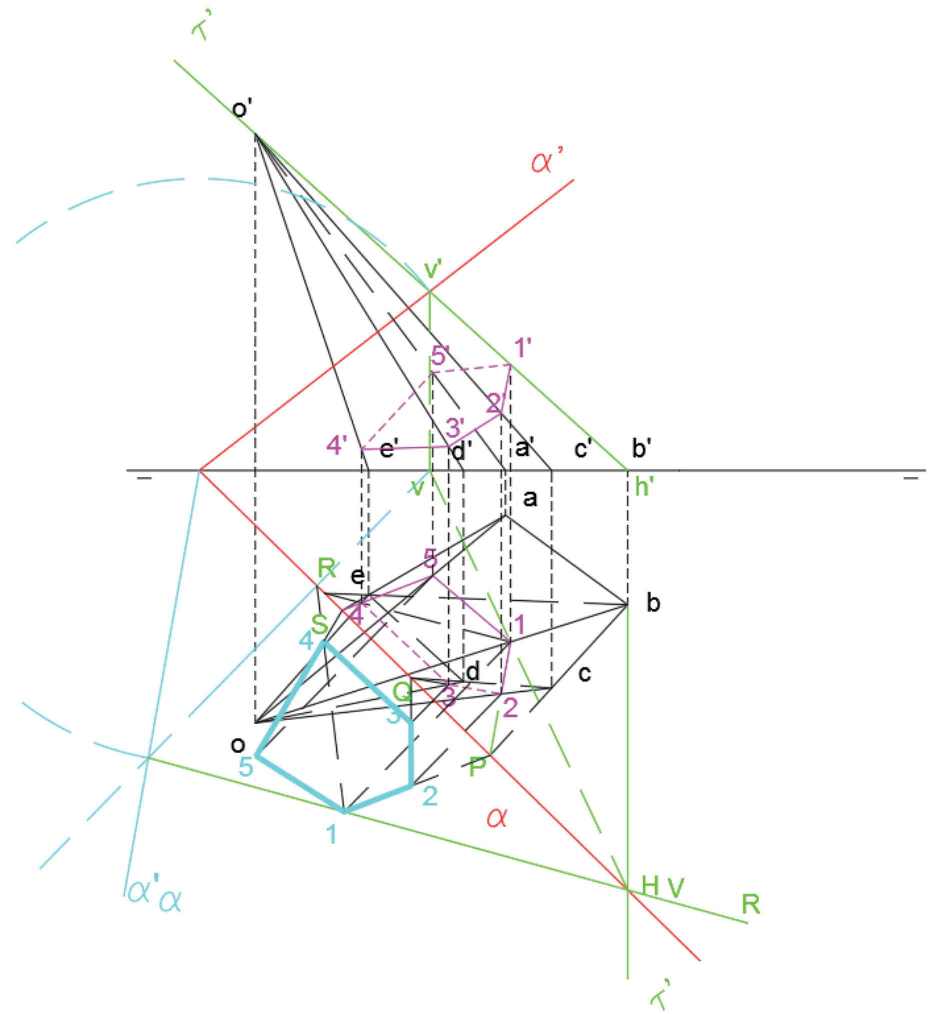


Fig. VM4

correspondientes proyecciones de las aristas en proyección vertical), lo que resta es encontrar su verdadera magnitud, que en este ejercicio se encontrará por abatimiento.

- Para abatir el plano, utilizamos la traza vertical de la recta V–H, de la manera ya vista en ejercicios anteriores; por Va, pasará la traza vertical abatida del plano, es decir $\alpha' \alpha$. Seguidamente se verá recta por recta, abatidas, los puntos de la sección que se verá en verdadera magnitud.

- El punto 1 de la sección está en la recta V–H; por lo tanto desde la proyección horizontal de 1, se traza perpendicular a la charnela hasta encontrar dicha recta abatida, obteniendo la verdadera magnitud de este punto en (1)

- El punto 2 está en la recta O–1, por eso como O es traza horizontal de dicha recta, desde 2, trazamos la perpendicular hasta cortar la recta O–(1), en cuya intersección estará el punto (2).

- Para encontrar el punto 3, como éste está sobre la recta R–4, unimos su traza horizontal R, con su traza vertical abatida V3α, y desde 3 trazamos la perpendicular a la charnela hasta encontrar en ella el punto (3), visto en verdadera magnitud. Sobre esta misma recta está el punto 4, por lo que desde él trazamos perpendicular a la charnela hasta encontrar la recta abatida vista en este acápite, permitiendo así encontrar el punto (4).

- Para encontrar el punto (5), nos aprovechamos del (1), que ya ha sido hallado, puesto que ambos están en una misma recta; como la traza horizontal de esta recta es T o h4, desde 5, trazamos la perpendicular a la recta mencionada, hasta encontrarla, determinando de esta forma a (5).

5.- Encontrar la verdadera magnitud de la sección de una pirámide cortada por un plano oblicuo, estando aquélla apoyada en el plano horizontal. (fig. VM5)

- En este ejercicio utilizaremos el método de cambio de planos para el encuentro de la verdadera magnitud de la sección solicitada en el enunciado.

- Mediante el uso de un plano proyectante τ' – τ, iniciamos el encuentro de la sección, comenzando por el punto 1, que se encuentra en la arista a'–a; por el procedimiento de la ley de afinidad, encontramos los demás puntos, utilizando la traza α, en donde usamos como auxiliares los puntos O, P, R y S; estos pasos previos nos permite hallar la sección 1, 2, 3, 4, 5.

- Una vez hallada la sección, procederemos a encontrar su verdadera magnitud, utilizando el procedimiento de cambio de planos; para ello, mediante un primer cambio de plano vertical, convertimos al plano α en proyectante vertical α'**1**–α**1**, usando para ello como auxiliar el punto o'–o de i intersección entre las líneas de tierra L–T y L1–T1.

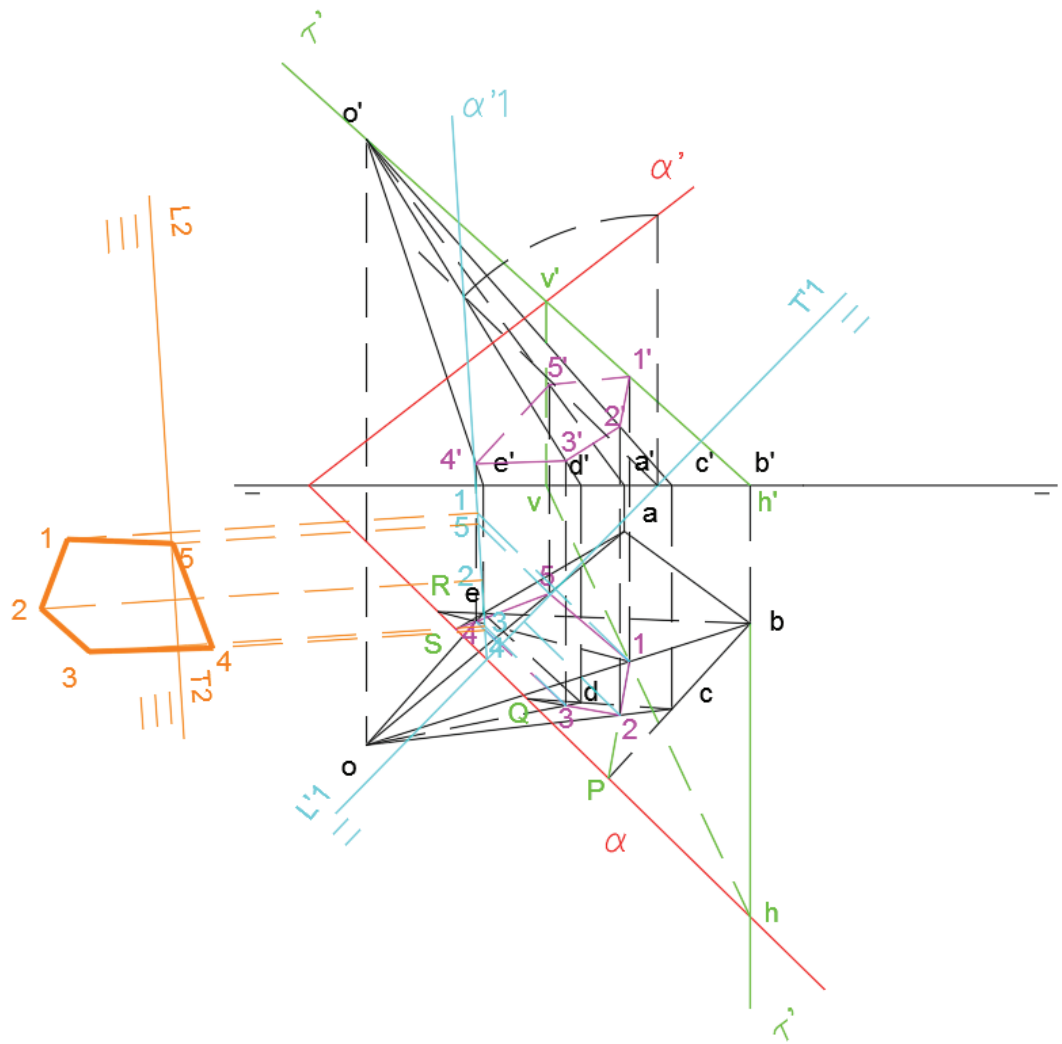


Fig. VM5

- Mediante un segundo cambio de plano, esta vez horizontal, colocamos la nueva línea de tierra L2–T2, paralela a la traza vertical α'**1;** trazando perpendiculares desde los puntos alineados sobre esta traza vertical, y llevando a ellas el alejamiento del segundo estado, encontraremos sobre L2 -T2, la verdadera magnitud de la sección **1, 2, 3, 4, 5.**

6.- Encontrar la verdadera magnitud de la sección de una pirámide hexagonal, apoyada sobre el plano horizontal, cortada por un plano oblicuo, utilizando el procedimiento de giros. (fig. VM6)

- Primero que nada, al igual que en los ejercicios precedentes, tendremos que encontrar la sección producida en la pirámide por el plano oblicuo α'**–** α, utilizando para ello la ley de afinidad, con los puntos O, P, R, S, T, sobre la traza horizontal del plano.

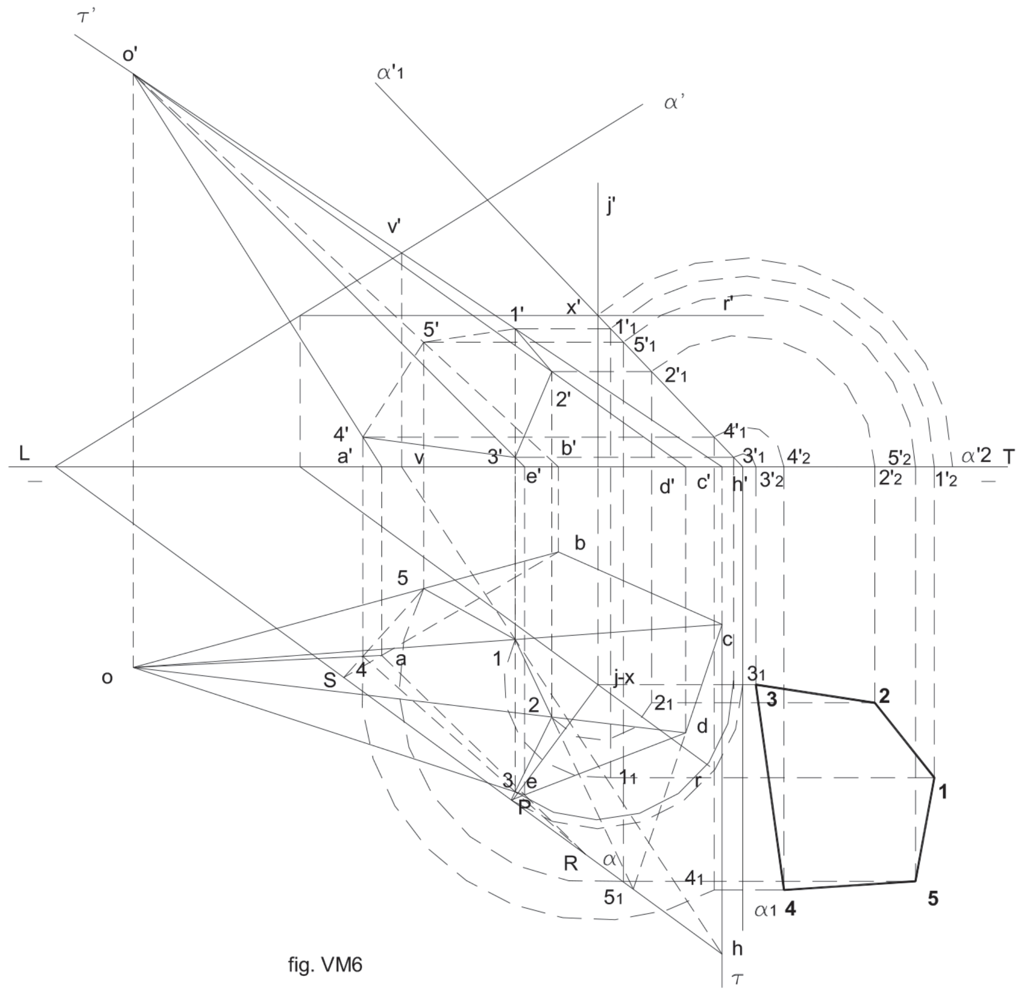


Fig. VM6

- El primer giro nos permitirá convertir al plano en proyectante vertical; para ello usamos el eje vertical j'–j, que se cortará con la horizontal r'–r en el punto x'–x; con la perpendicular de x a α, giramos en sentido horario la traza horizontal del plano, hasta convertirla en perpendicular a la línea de tierra, una de las condiciones que debe cumplir un plano para ser proyectante vertical.

- La traza vertical v'1 de la recta horizontal R, va a ir a confundirse con x', que es por donde pasará la nueva traza vertical del plano, α'1.

- Todas las proyecciones verticales de la sección, van a ir a colocarse confundidas con la nueva traza vertical del plano, mediante paralelas desde ellas a la línea de tierra, mientras que las proyecciones horizontales girarán en sentido horario, lo que giró su traza horizontal.

- Con centro en la intersección de la línea de tierra con la traza α**'1**, giramos ésta sobre el plano horizontal hasta confundirla con la línea de tierra, arrastrando con ella a las proyecciones verticales de la segunda situación.

- Desde estas últimas, bajamos perpendiculares a la línea de tierra, hasta encontrar las paralelas a la línea de tierra trazadas desde las proyecciones horizontales giradas en el paso anterior.

- En estas intersecciones estarán las posiciones de la sección de la pirámide vista en verdadera magnitud, **1–2–3–4–5–6.**

INTERSECCION DE SUPERFICIES

Para poder encontrar la intersección de dos superficies **S** y **T**, es preciso cortar ambas por otra auxiliar α que en caso del ejemplo gráfico de la fig. 268 es plana, hallando las respectivas intersecciones **m** y **n**, con las inicialmente dadas. Los puntos de corte **X** y **Y**, de **m** y **n**, al ser comunes a las dos superficies, pertenecerán a su intersección **i**.

Por repetidas operaciones similares a la anterior, por otros planos cortantes. cada uno de ellos determinará nuevos puntos que unidos ordenadamente, determinarán la intersección buscada.

Toda superficie auxiliar debe cumplir la condición de cortar según líneas sencillas y fáciles de determinar, como ser rectas, círculos, etc. La más usada es un plano, que como hasta ahora serán llamados con letras del alfabeto griego, para evitar confusiones en la representación.

Hay cuatro formas de determinar casos de intersección:

- mordedura
- penetración
- penetración tangencial
- penetración mútua o máxima

1.- Mordedura

En este caso cada superficie corta parcialmente a la otra. La línea de intersección es contínua, quebrada o curva y generalmente alabeada. (fig. 269)

En el ejemplo presentado, un cilindro corta parcialmente a un prisma, viéndose que algunas generatrices (la del arco

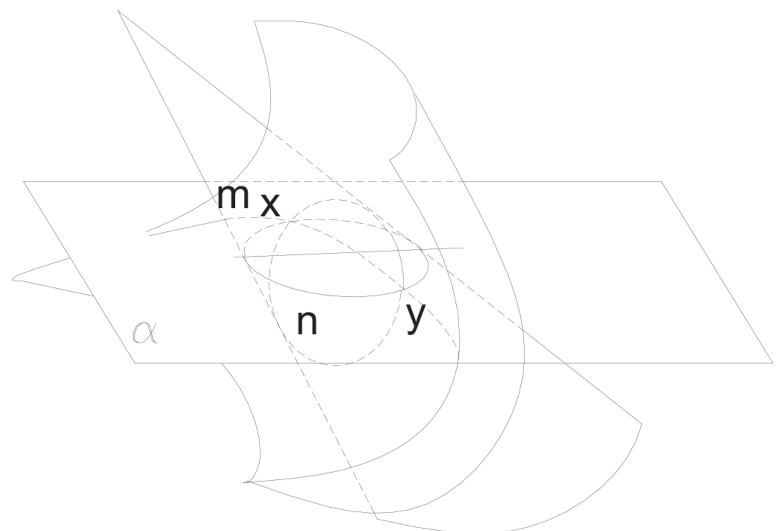


Fig. 268

XYZ), son exteriores al prisma, y viceversa. La curva de intersección **XPNYZMGX**, está formada por el arco circular **XGMZ**, y la sección elíptica XPNYZ. ambas componen la sección del prisma con el cilindro

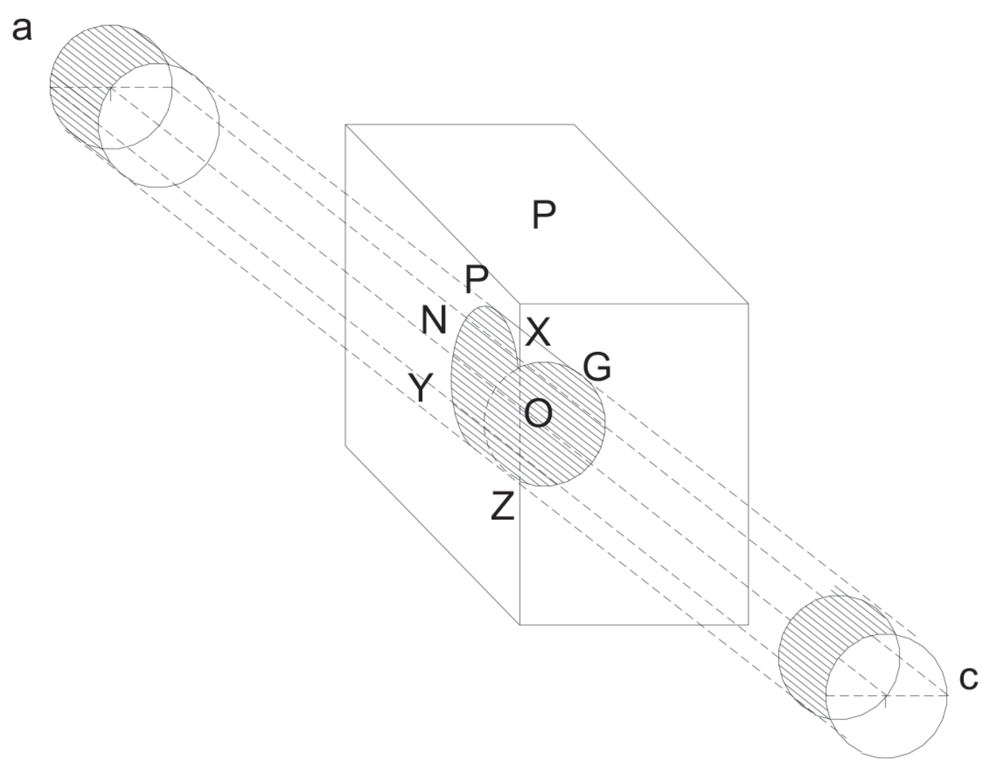


Fig. 269

Ejemplo práctico: (fig. 270)

Veamos el caso de intersección de dos cilindros **C1** y **C**2, apoyados ambos por referencia en el plano α .

- Nos trazamos cinco rectas en el plano **a**, de las que la **R1** es tangente a la base del cilindro **C1**, en el punto **D**, y la **R4**, lo es a la base del **C2** en el punto **4.** Las otras, **R2**, corta a la basedel **C1** en **C** y **E**, y a la del **C2,** en **6** y **2**; **R3** corta en **B** y **M** y en **5** y **3** respectivamente. La **R1** que tangente a **C1** en la base, en **D**, corta a la base del **C2**, en **6** y **2**; **R3** corta en **B** y **M** y en **5** y **3** respectivamente.

La **R1** que es tangente a **C1** en la base, en **D**, corta a la base en **7** y **1**, y la **R4** que es tangente a **C1**, en **4**, corta a la base CI en A y N. Finalmente la **R5**, tangente a la base del **C1**, en **O**, que es exterior a la base del **C1**.

- Por **D**, trazamos una arista del **C1**, la que se cortará con las aristas trazadas por **1** y **7** de **C2**, en **D1** y **D7**.

- Por **C** y **E**, de **C1**, se realizará la misma operación, cortando en **C6–C2**, y **E6–E2**, a las aristas levantadas por **6** y **2,** de **C2**.

- Por **A** y **N**, conseguimos con procedimientos similares, **A4** y **N4**.

- Como **O** pertenece a **R5**, que es externa a la base de **C2**, no tendrá corespondiente en las aristas de **C2**.

- La unión sucesiva y ordenada de los puntos encontrados, nos dará la sección **N4-M3-E2-D1-C2-B3-A4-B5-C6-D7-E6-M5.**

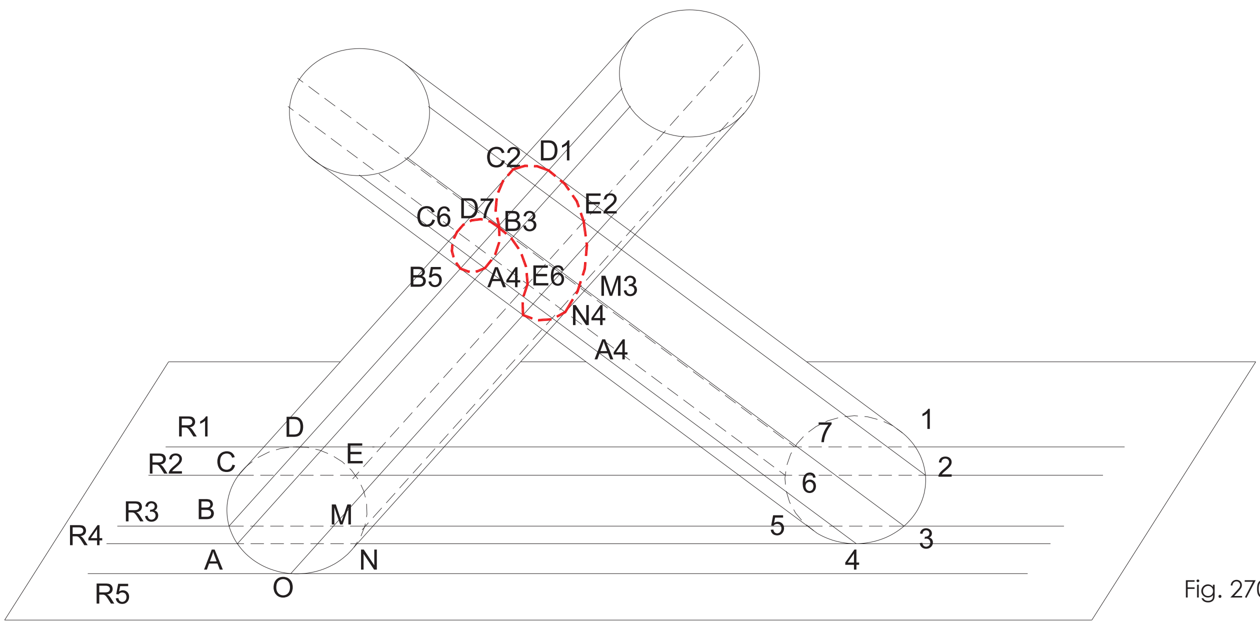


Fig. 270

2.- Penetración

Se entiende por penetración el hecho de que un cuerpo atrviesa completamente a otro, formándose por tanto una curva de entrada, (o sección poligonal) y otra de salida (idem), independientes y distintas entre sí.

Véase el ejemplo, en el que **R** y **S**, son las curvas de entrada y salida. La primera es un círculo, y la segunda una elipse. Los centros de ambas curvas son **Rc** y **Sc**. (fig. 271)

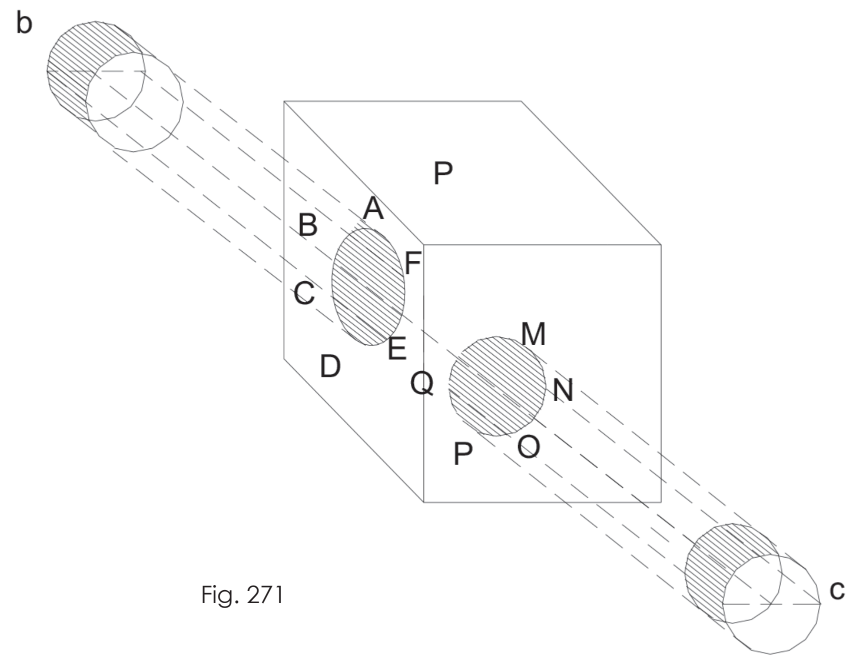


Fig. 271

Ejemplo de aplicación Nº 1: (fig. 272)

- Tenemos los cilindros **C1** y **C2**, apoyados ambos en el plano α .
- Observando las rectas **R1, R2, R3, R4, R5** que pasan por la base del **C2**, se ve fácilmente que éstas atraviesan a la base del **C1**, en los puntos **M y D, N y E, O y F, P y G, Q y H.**
- Con procedimientos similares a los realizados en el caso de mordedura, vamos a ver la generación de las curvas de entrada y salida en ambos cilindros.
- La recta **R1**, es tangente a la base del cilindro **C2**, pero corta a la del **C1**, en los puntos **D** y **M**.

- Desde estos tres puntos trazamos generatrices paralelas a las aristas de sus cilindros, viendo que se cortan en **D1** y **M1**.

- La recta **R2** corta a la base del **C2**, en los puntos **2** y **8**, en tanto que a la del **C1**,lo hace en **E** y **N**.

- Trazando paralelas como en el caso de **R1**, desde **2**, **8**, **E** y **N**, encontramos sus intersecciones en **E2, N2**, por un lado, y en **E8, N8**, por otro.

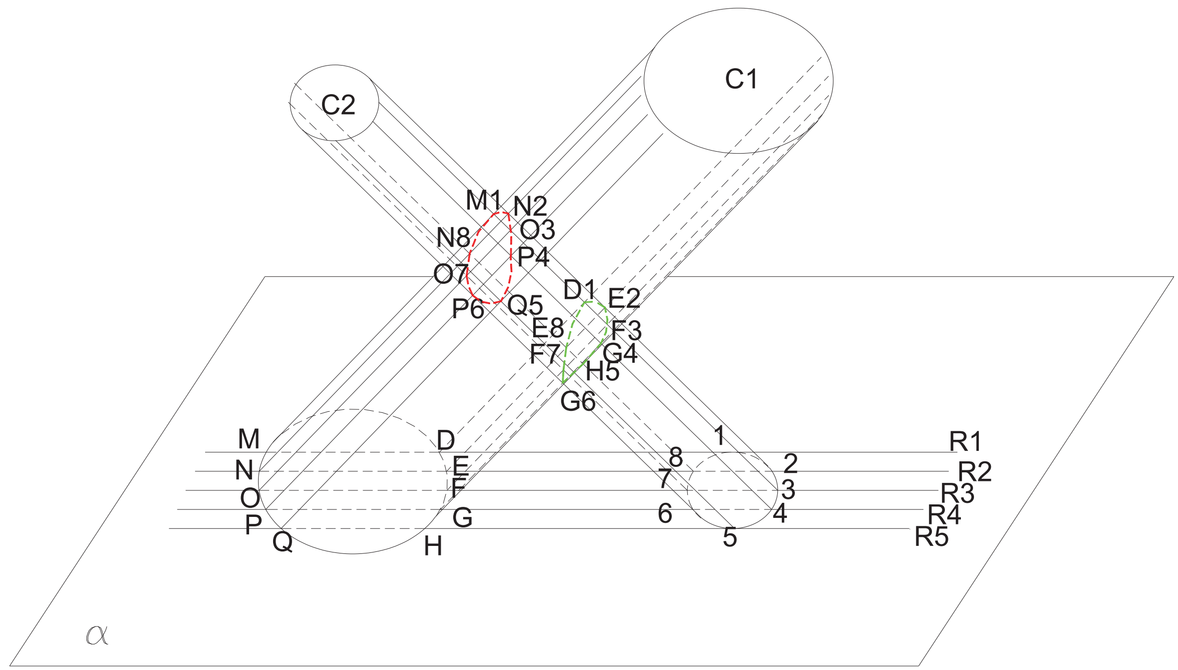


Fig. 272

- La recta **R3** corta en **3** y **7** a la base del **C2** y en **F** y **O** a la del **C1.**

- Las paralelas por ellos a sus respectivas aristas, lo hacen en **F3**, **O3**, y en **F7** y **O7.**

- En **G4**, **P4**, y **G6** , **P6**, encontramos las intersecciones de las paralelas a sus respectivas aristas.

- Finalmente **R5** que es la tangente a la base del **C2**, corta a la del **C1** en **H** y **Q**.

- Estos puntos se reflejan en las curvas de intersección, en **H5** y **Q5**.

- **D1-E2-F3-G4-F7-E8**, será la curva de penetración del cilindro **C2**, en el cilindro **C1**.

- **M1-N2-O3-P4-Q5-P6-O7-H8**, será la curva de salida del cilindro **C2** en el **C**1.

Ejemplo de aplicación Nº 2: (fig. 273)

- Tenemos el caso de un prisma triangular, que **"muerde"** a otro trapezoidal, que presenta similitud con el caso anterior, y que por tanto, se sigue en él los mismos pasos

- La recta **R1**, corta a la base del **P2** en los puntos **1** y **7**, y es tangente a la base del prisma **1**, en el punto **G**.

- Pasando por el punto **1** paralelas a sus aristas laterales, se corta a la arista que arranca en **G** del prisma **1**, en los puntos **G1** y **G7.**

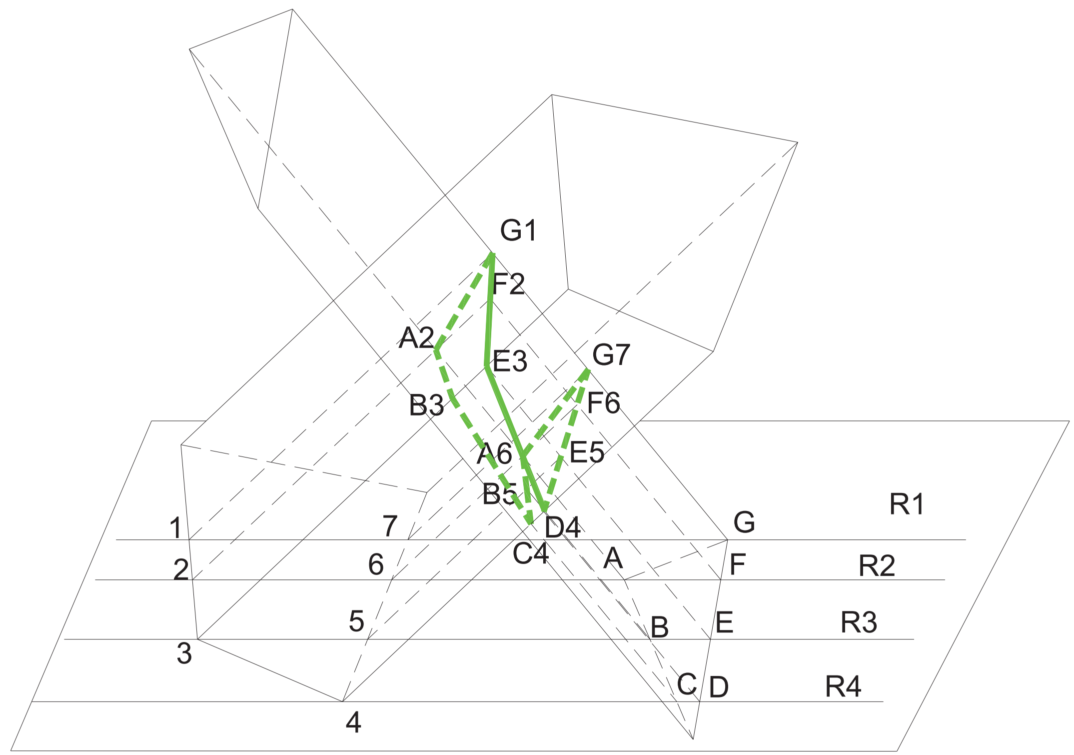


Fig. 273

- Haciendo lo mismo con la recta **R2**, por los puntos **2** y **6**, se corta a las aristas por **A**, en **A2** y **A6**, y a la paralela por **F** a sus aristas laterales, en **F2** y **F6**.

- Idem por **R3**, encontramos **B3, B5**, y **E3, E5**.

- Por último con la **R4**, encontramos **C4** y **D4**.

- Finalmente uniendo ordenadamente los puntos, se obtiene la sección **G1–A2–B3–C4–B5–A6–G7–F6–E5–D4–E3–F2–G1**.

3.- Penetración tangencial

Es el caso en el que las rectas auxiliares de los trazos auxiliares, son tangentes a una de las superficies de las bases. La recta que es tangente a ambas superficies, determinan un punto común de las curvas de entrada o salida (fig. 274). Una visión clara de esta situación se ve en la figura del ejemplo siguiente.

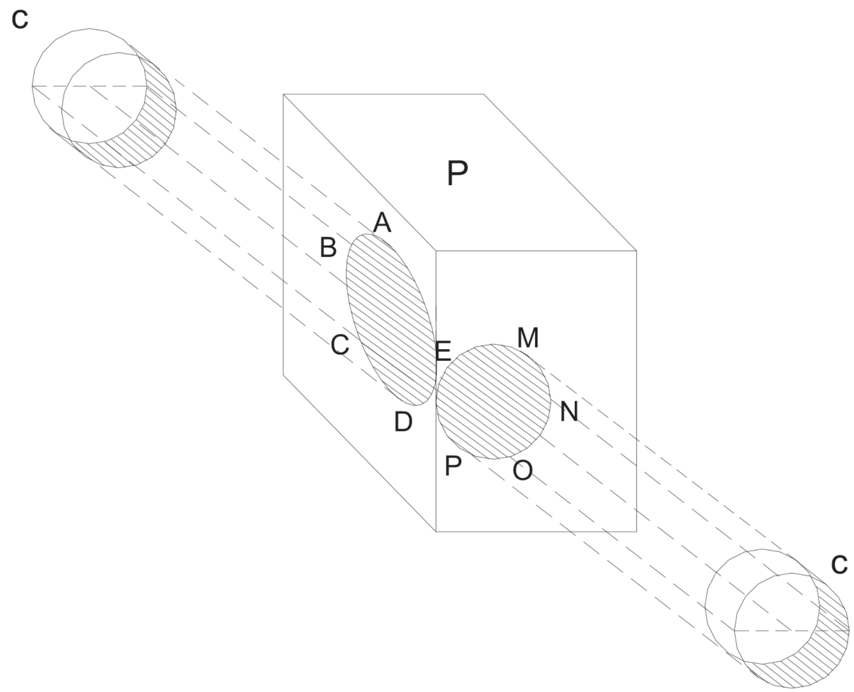


Fig. 274

Ejemplo de aplicación: (fig. 275)

- Tenemos el caso de las rectas **R1, R2, R3, R4, R5**, del plano **a,** en donde están apoyados un cono a cuya base le son tangentes las rectas **R1** y **R5**, y un cilindro cuya base apoyada en al plano **a**, es cortada en **I–A** por **R1**, **H–B** por **R2**, **G–C** por **R3**, **F–D** por **R4**, y cuyo punto **F**, es el de tangencia con la recta **R5**.

- Las mencionadas rectas **R1** y **R5**, son tangentes a la base del cono, en los puntos **1** y **5**.

- Las rectes **R2** y **R5**, tangentes a la base del cono, se encuentran en **X**.

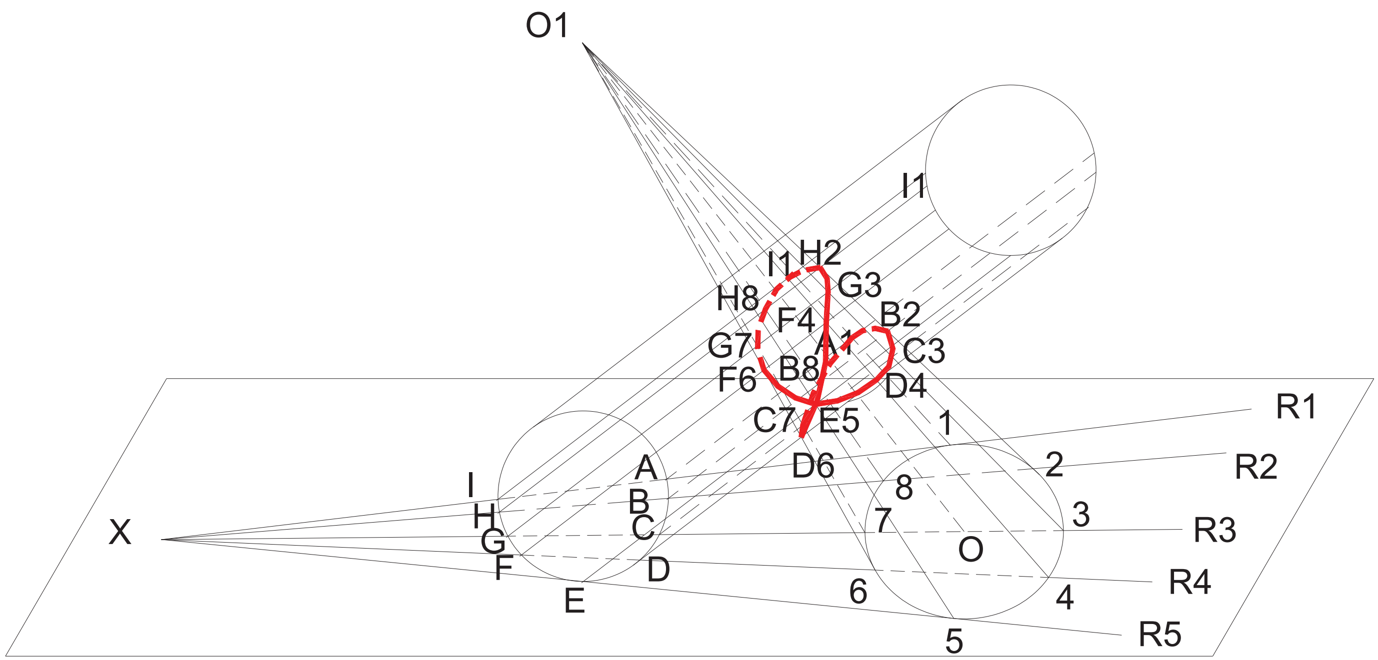


Fig. 275

- La conjunción de las generatrices del cono (**1 a 8**), se encuentra en **O1**, que al unirse con **X**, es paralela a las aristas del cilindro.

- La recta **R1** corta a la base del cono en **I–A**; con los procedimientos ya conocidos, encontramos **I1** y **A1**, en la intersección de las rectas **1–O1** y la arista **1** del cilindro.

- La recta **R2** corta a la base del cono en **2 y 8** y a la base del cilindro en **H y B**; **2–O1** y **8–O1**, se cortan con las aristas del cilindro por **H y B**, en **H8–H2**, y **B2–B8**.

- La recta **R3** corta a la base del cono en **3** y **7**, y a la base del cilindro en **G y C**. Estos a su vez, en sus respectivas intersecciones, dan **G7–G3** y **C7–C3**.

- Haciendo lo mismo con la recta **R4**, encontramos **F6–F4** y **D6–D4**.

- De la misma manera la recta R5, determina el punto E5.

- La unión sucesiva de los puntos de intersección da la sección **E5–F6–G7–H8–Y1–H2–G3–F4–E5–D6–C7–B8–A1–B2–C3–D4–E5.**

4.- Penetración máxima: (fig. 276)

Es el caso en que las rectas extremas, son tangentes simultáneamente a las bases de los cuerpos que se cortan en el espacio. Es por tanto una penetración mútua de ambos cuerpos. Los puntos comunes a ambas curvas de entrada y salida, son los determinados por las tangemtes extremas.

Ejemplo de aplicación: (fig. 277)

- Se trata de dos conos apoyados en el plano **a** en el que las rectas extremas **R1** y **R7** son tangentes simultáneamente a sus bases en **1** y **A**, a **O1** y **O2**, y **7** y **G** respectivamente.

- Como el procedimiento para este tipo de trabajo, es similar a los anteriores, salvo que las generatrices son convergentes en las res cúspides **O1** y **O2** de los conos en cuestión, debe seguirse el mismo tipo de pasos intermedios para conseguir las secciones correspondientes.–Las generatrices levantadas por **1** y **A**, puntos de tangencia de **R1** con ambas bases, se cortan en **A2**, y las levantadas por **7** y **F**, puntos de tangencia de **R7**, lo hacen en **F7**.

- **R2** corta en **3** y **11** a la base del cono **O1** y en **N** y **B** a la del **O2**, y en las secciones determinan los puntos **B3–B11** y **R3–R11**.

- **R3**, a través de los puntos **4–10** y **C–M**, de las bases, nos da los puntos **C4–C10**, y **M4 – M10** en las secciones que estamos buscando.

- De la misma manera con la recta **R4**, encontramos **D5–D9** y **H4 – H9**.

- Con **R5**, a través de 6 y 8, se encuentran **E6 – E8** y **G5–G9**.

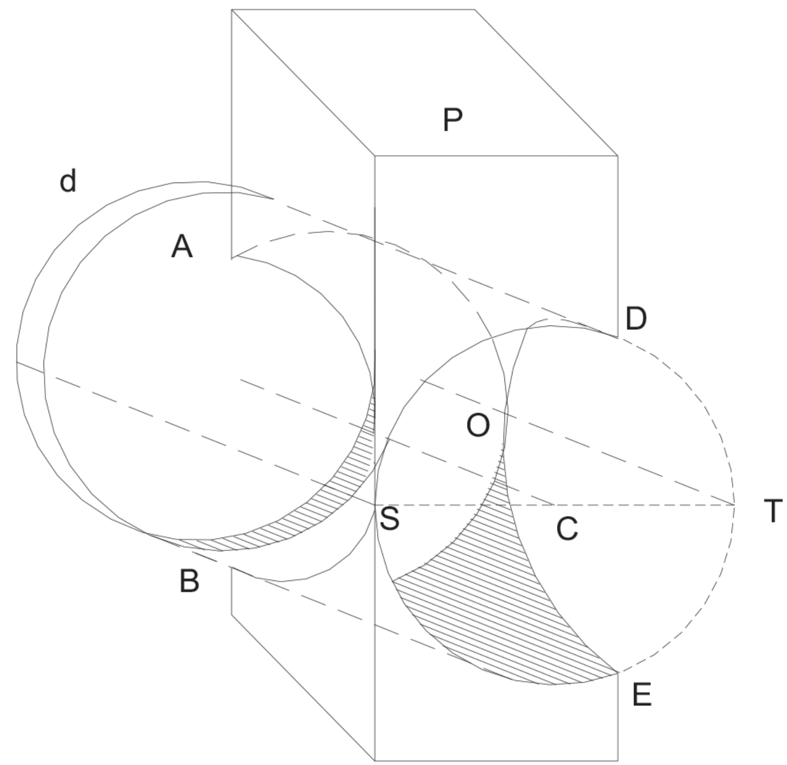


Fig. 276

- **R6** al cortar a la base del **O1** en **7**, y a la del **O2** en **F**, determinan los puntos F7 en las elipses sección.

- La unión sucesiva de los puntos determinados, nos permite encontrar las dos elipses sección: **A1–B11–C10–D9 – E8 – F7 – G6–H6–H5–M4–N3–A2 ,** por un lado, y: **A2 – B3 – C4 – D5 –E6 – F7 – G8 – H9 – M10–N11–A1**, por otro.

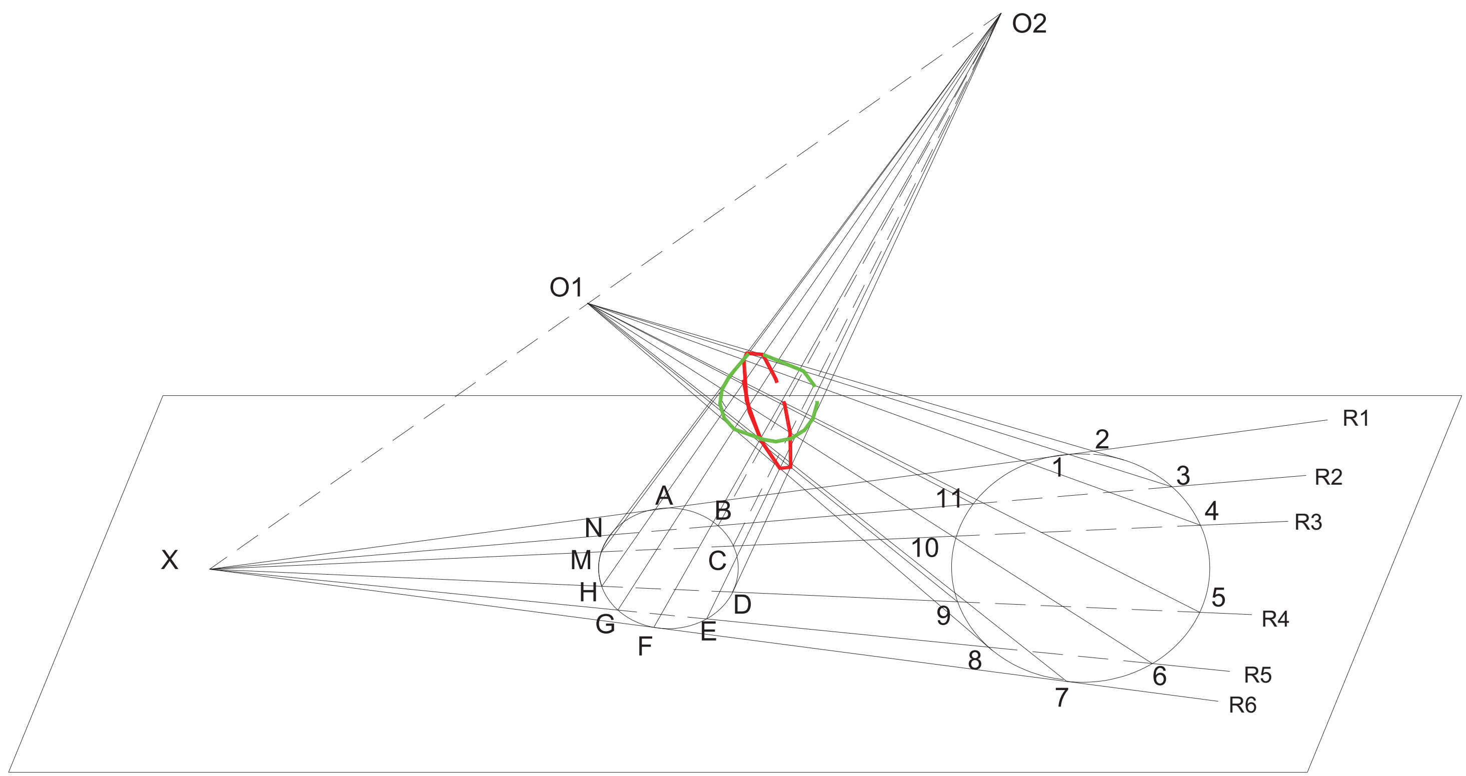


Fig. 277

5.- Encontrar la intersección de dos prismas (fig. I 5)

- **Tenemos el caso de dos prismas, uno el Q, apoyado en el plano horizontal, y el otro, el P, oblicuo que como el anterior, apoyado también en el horizontal.**

- Como uno de los prismas es vertical, los planos auxiliares paralelos a las generatrices de ambos, serán proyectantes horizontales, y sus trazas horizontales, T1, T2, T3, T4, T5, T6, paralelos a las proyuecciones horizontales de las generatrices del prisma oblicuo P.

- Los planos límites T1 y T6, son tangentes al prisma P, encontrándonos entonces con un caso de penetración.

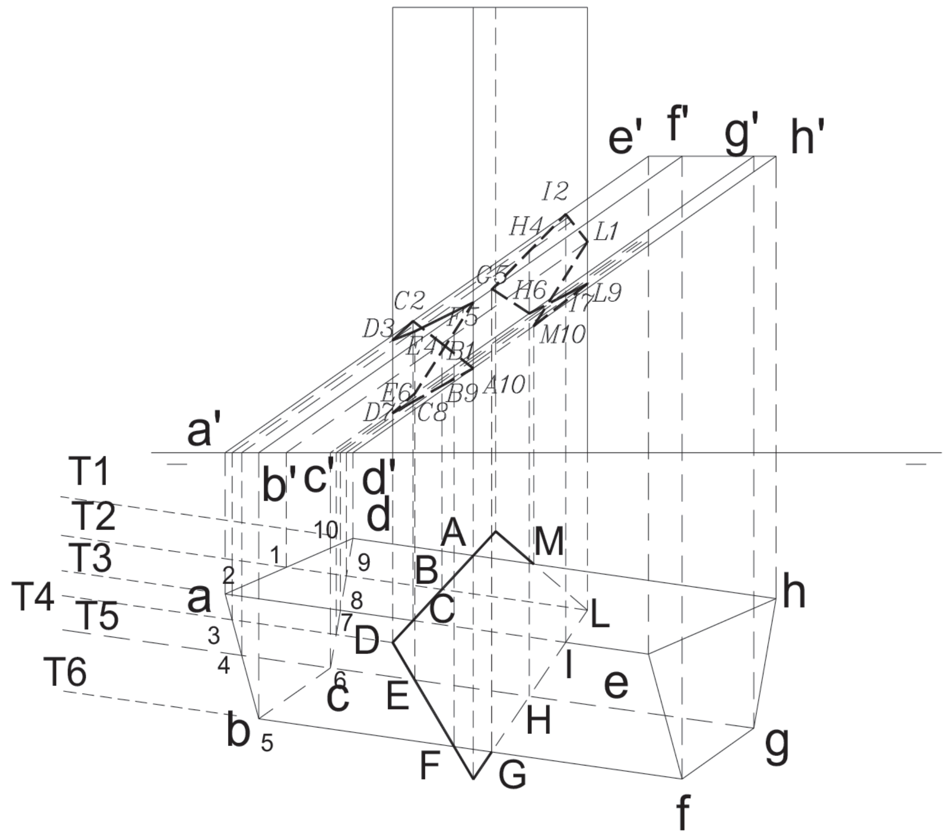


Fig. I 5

6.- Encontrar la intersección de dos pirámides (fig. I 6)

- Se trata de la pirámide q–q’ de base cuadrnagular GNAM, y de la p–p’, también de base cuadrangular DUST. Las cúspides son: o’–o, de la q–q’, y x–x’ de la p–p’.

- Empezaremos con la unión de ambas cúspides, que nos da la recta r–r’, de trazas v’–v, y h’–h.

- De acuerdo a los pasos normales, los planos auxiliares han de pasar por dicha recta, es decir por sus respectivas trazas.

- El plano α–α’, pasando por a de la base de la pirámide q–q’, que corta a la base de la p’–p, será un plano límite.

- El plano β–β’, que pasa su traza vertical b’ por d’ de la base de la pirámide q–q’, será otro plano límite.

- El presente ejercicio es un caso de mordedura.

- No habiendo otro vértice entre ambos planos, no habrá necesidad de otro plano auxiliar.

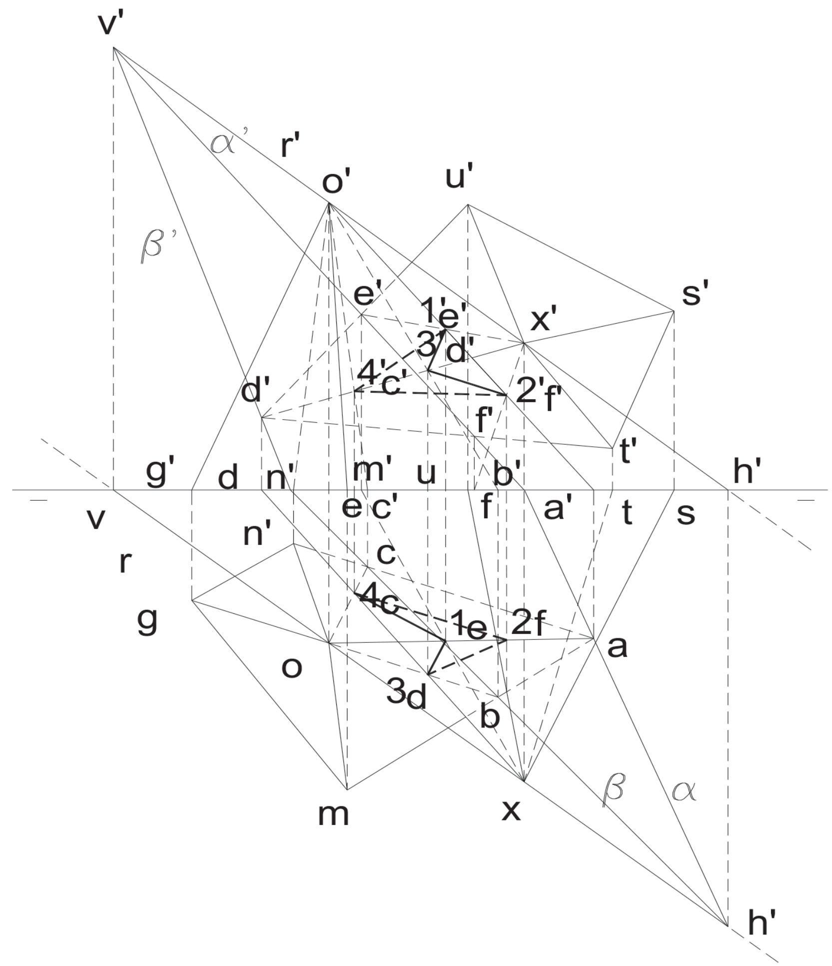


Fig. I 6

- Ambos planos cortan a la pirámide q–q', según las aristas a'–a, b'–b, c'–c, y a la p–p', segáun d–d', e–e' y f–f'.

- La arista a–a', corta a las determinadas por e–e' y f–f', en 1'e'–1e y 2'f'–2f (por estar las tres situadas en el plano α).

- Del mismo modo la determinada por d'–d, corta a las c'–c, b'–b, en 4'c'–4c y 3'd'–3d.

- La unión ordenada de los puntos así obtenidos nos da la línea quebrada de intersección 3'c'–2'f'–4'c'–1'e'–3'c'–3d–2f–4c–1e–3d.

OCTAVA UNIDAD

SOMBRAS

INTRODUCCION: El estudio de las sombras tiene por objeto, la aplicación al dibujo, de los efectos de luz y sombra que se efectúan en la naturaleza, dando con ello sensación de realidad, contribuyendo a dar relieve, movimiento y belleza a los objetos representados.

Le Geometría Descriptiva tiene en ello gran aplicación, pues de ella hay que valerse para las aclaraciones y demostraciones de los variados y distintos problemas que se pueden presentar, utilizando los planos ortogonales de proyección y aunque en menor frecuencia, proyecciones oblícuas.

Concepto de luz: Llámase luz, al agente físico que actuando en el sentido de la vista, produce sensaciones de percepción de los objetos que nos rodean. Sin él no podríamos percibir las imágenes, formas y colores de los cuerpos.

Según este concepto, podemos dividir a los cuerpos que nos rodean, en dos grandes grupos:

- **luminosos**, que emiten luz (sol, estrellas, etc.)

- **opacos**, que reciben las emanaciones de los primeros, gracias a los cuales son visibles.

Otra forma de llamarlos será:

- **luminosos**, los capaces de producir luz por sí solos.

- **iluminados**, aquellos que reciben esta luz.

Los cuerpos iluminados reflejan la luz que reciben, con mayor o menor intensidad, de acuerdo a la que reciben, y a su propia constitución.

Clasificación de los cuerpos iluminados: Según su capacidad de reflejar o de recibir la luz, los cuerpos iluminados, pueden ser:

1) **Cuerpos transparentes:** aquellos por los que pasa la luz y permite ver a través de ellos (vidrio, agua, gases, etc.)

2) **Cuerpos translúcidos**: permiten pasar la luz, pero no dejan ver los objetos situados atrás de ellos, a no ser vagamente, como el vidrio esmerilado, láminas de acrílico opaco, etc.

3) **Cuerpos opacos:** Los que no permiten pasar la luz a su través.

COMPORTAMIENTO DE LA LUZ:

Hay tres grandes principios de comportamiento de la luz, los mismos que son:

a) **Propagación lineal:** En todo medio homogéneo, la luz se propaga en línea recta. También se propaga en todas direcciones por medio de rayos luminosos. Si se consideran varios de esos rayos, se denominan **haz de rayos luminosos.**

Para las aplicaciones del estudio de la luz y sombra, se considera sólo un rayo, llamado **rayo de luz**, o **rayo luminoso**, o **rayo proyectante**.

b) **Velocidad de la luz:** No es posible suponer que exista un movimiento que se propague instantáneamente. Forzósamente debe tardar un cierto tiempo en trasladarse, por pequeño que sea; a este tiempo se lo mide en segundos, por lo tanto, la luz tarda cierta cantidad de segundos para trasladarse desde su origen hasta el observador.

Se ha llegado a determinar que en un medio homogéneo, la luz se propaga a 300.000 km. por segundo, en el aire, y a 225.000, en el agua.

c) **Intensidad de la luz:** La luz decrece a medida que se aumentan los cuadrados de las distancias. Esta es una ley matemática que se puede demostrar gráficamente, por representaciones geométricas. (fig. 313)

Tomemos varios planos paralelos, con superficies bien uniformes, y coloquémoslos de frente a un foco de luz, **F**, paralelos entre sí, de manera que el plano α, esté a una distancia **d** del foco, el β , a la distancia **2d**, y el γ , a **3d**.

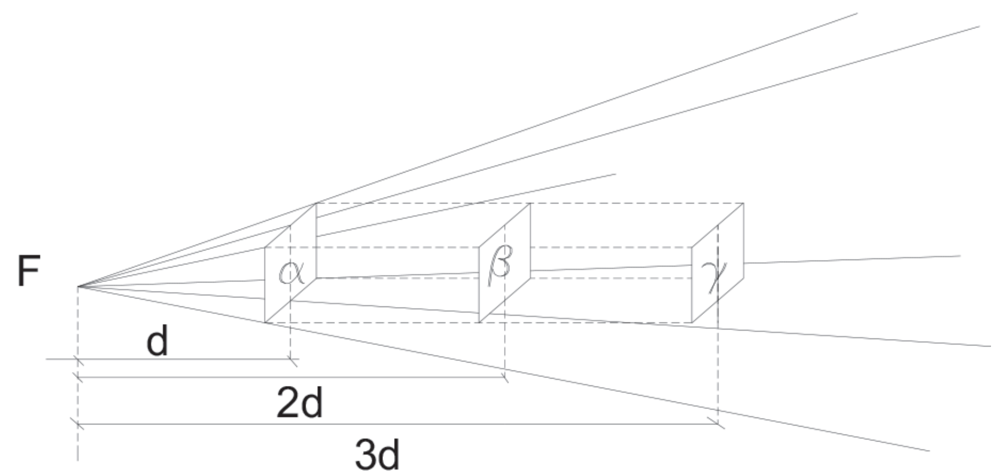


Fig. 313

Al considerar el foco colocado a una distancia finita de un plano, los rayos divergentes que parten del mismo, iluminan de lleno la cara del plano α, y otros le son rasantes en todo su contorno; al retirar α, quedaría el β, al que rodean los rayos que fueron rasantes al α, pero sin tocarlo, estando como se dijo, el plano β, a la distancia **2d**; se ve que a esta distancia hay un desperdicio de rayos de luz y por lo tanto se deduce que la intensidad de la misma habrá disminuído. Lo mismo sucederá, si consideramos los rayos rasantes al plano β, con respecto de γ, cuya distancia es la de **3d**. Esto también puede explicarse considerando que las moléculas radiantes comprendidas dentro de los rayos rasantes, se expanden más a la distancia **2d** que a la distancia **d**, y más aún a la distancia **3d**.

Esta ley se halla representada por la fórmula:

L = I/d ,

en que: L = luz producida

I = intensidad de la luz

d = distancia del foco al plano

Sombras propias y proyectadas:

Un cuerpo opaco expuesto a un foco de luz, como el que se ve en la fig. 314, tiene la cara **C** frente a él, iluminada, mientras que la opuesta **D**, en sombra, siendo ésta la sombra propia del cuerpo. (fig. 314)

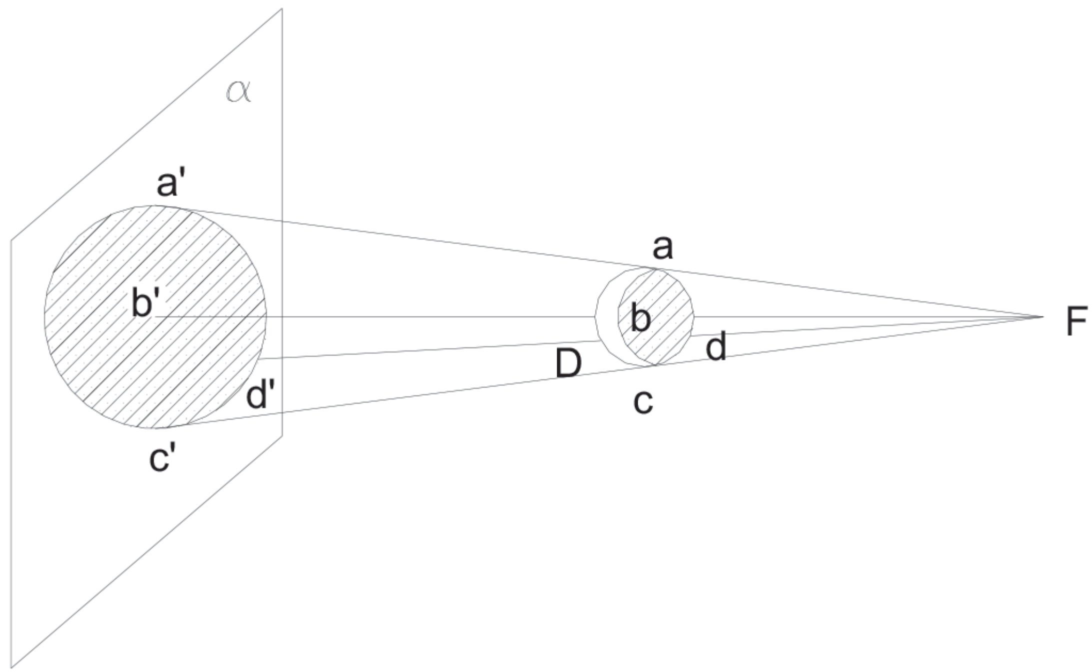


Fig. 314

Al colocar detrás de este cuerpo, un plano α, vemos que la sombra del cuerpo se proyecta sobre dicho plano a través de los rayos tangentes al cuerpo expuesto al foco de luz.

Acá, debemos aclarar los siguientes conceptos:

Separatriz: línea límite entre luz y sombra en el cuerpo tratado; es la línea **a b–c d**.

Sombra proyectada: figura vista en el plano de proyección, delimitado por los rayos tangentes al cuerpo: **Fa, Fb, Fc,** etc., que se proyectan sobre α .

Cono y cilindro de sombra: La forma de sombra proyectada en el ejemplo anterior (fig. 313), nos muestra un cono de base **a' b' c' d'**, y vértice **F**, que está mostrando una parte en sombra, **a b c d** (tronco de cono), y otra que está en luz, cono de base **a b c d** y vértice **F**.

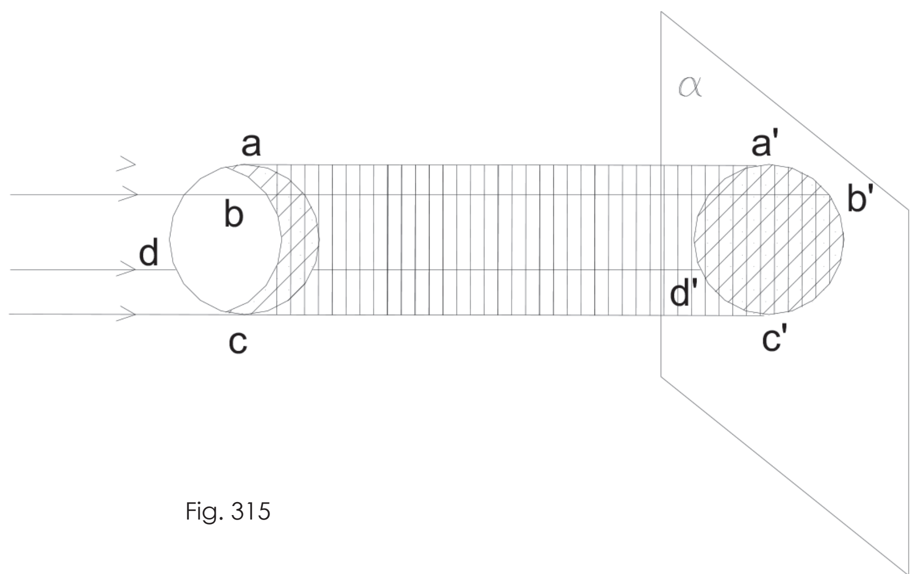


Fig. 315

Este es el caso producido en este tipo de proyecciones cuando el foco (vértice **F**), se encuentra a una distancia relativamente cercana.

Cuando el foco de luz (**F**), se encuentra a distancia infinita, o considerablemente alejada, los rayos proyectados, inciden en el cuerpo en forma paralela, proyectando en este caso una sombra no igual al cono, sino al cilindro. (fig. 315)

Esto es lo que decíamos en el sistema diédrico, al hablar de proyecciones cónicas, (fig. 314) y proyecciones ortogonales y paralelas (fig. 315)

Si el cuerpo opaco que consideramos no fuera una esfera, sino un cuerpo poliedral, ya no se podría hablar de cono o cilindro de sombras, sino prisma o pirámide de sombras, pues los rayos rasantes forman una superficie poligonal, y la sombra proyectada será también un polígono; esto lo podemos ver en la figura 315, en la que, para mayor comprensión, se ha tomado en lugar de un poliedro, el polígono **a b c d e**, cuya sombra proyectada sobre el plano **a**, será el **a’ b’ c’ d’ e’** entre los cuales se encuentra el prisma de sombras y del cual son sus bases.

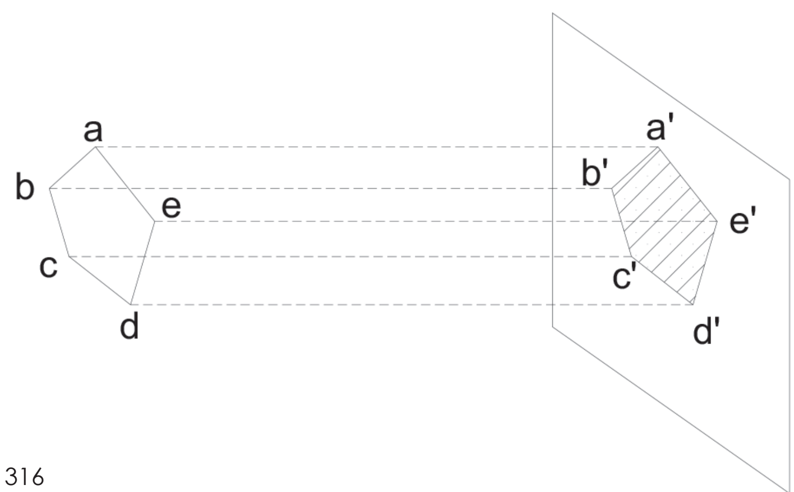


Fig. 316

En la figura 318 se ha considerado el foco luminoso F, a distancia finita, formando así el tronco de pirámide de bases **a b c d e** y **a’ b’ c’ d’ e’**.

Se observa en estas dos œltimas figuras, que el polígono de sombras tiene tantas caras, cuantos lados tenga el polígono, y si en lugar de un polígono, se hubiera tomado otro poliedro, la separatriz constituiría un polígono que actuaría como el estudiado

Se observa en estas dos últimas figuras, que el polígono de sombras tiene tantas caras, cuantos lados tenga el polígono, y si en lugar de un polígono, se hubiera tomado otro poliedro, la separatriz constituiría un polígono que actuaría como el estudiado.

Sombra y penumbra:

Lo visto anteriormente, fue basado en que el foco luminoso, ya estuviera a una distancia finita o infinita, era menor o igual al cuerpo opaco que se consideró.

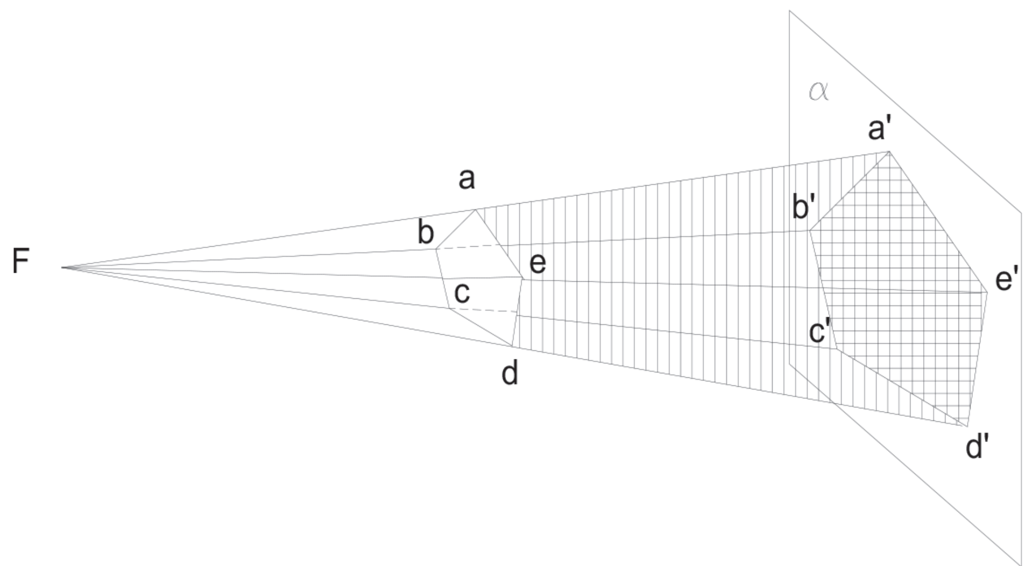


Fig. 317

En realidad se debe considerar el foco luminoso de mayor tamaño que el cuerpo opaco, por ser así más real, influyendo entonces en la forma que se verá sobre la sombra proyectada, debido a que el origen de la luz es un conglomerado de puntos, todos los cuales son capaces de efectuar por separado, el mismo efecto hasta ahora visto. Considerando el cuerpo **L**, como origen de la luz, (fig. 318) mayor que el cuerpo opaco **O**, los rayos tangentes **a a'** y **b b'** son convergentes en el punto **V**, así como también todo otro rayo tangente que se considere; luego colocando un plano **a** se obtendrá proyectada en él, la sombra **a" b"**, la cual es la sombra pura que, como se ve, es menor que el cuerpo **O**, y no igual o mayor como se tenía en las anteriores figuras.

Siendo el origen **L** de la luz mayor que **O**, habrá una sombra más clara rodeando la anterior; esta se denomina **penumbra** y que se determinará de la siguiente manera: se trazan dos rayos tangentes interiores a **L** y **O**; estos son los **c c' y d d'**, los cuales se cortan en **x**. El rayo tangente **c c'**, se proyecta en **c"**

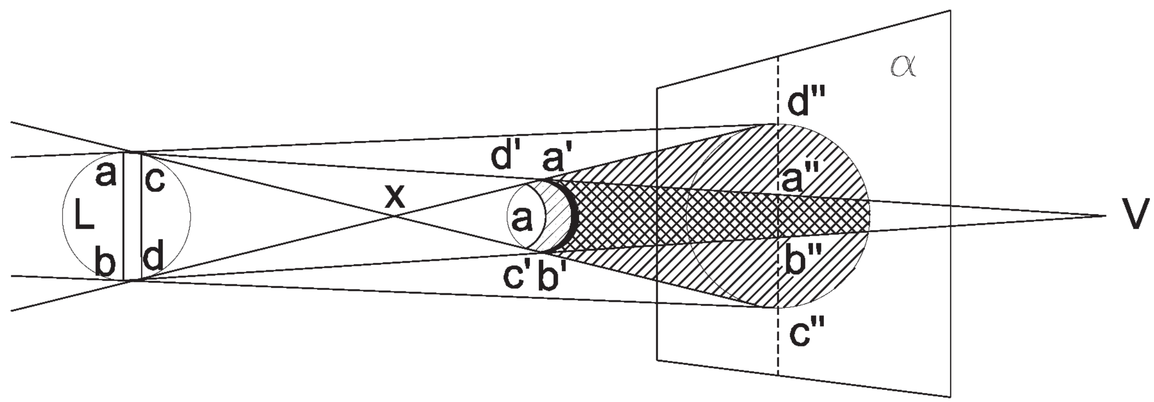


Fig. 318

sobre el plano **a** y el rayo tangente **d d'** en **d"** del mismo plano; si se consideran todos los rayos tangentes interiores que rodean a **L** y **O**, se proyectarán formando la circunferencia de sombras **c" d" c"** del plano **a**. La sombra correpondiente a la circunferencia **c" d" c"** es de menor intensidad que la correspondiente a la **a" b" a"** del mismo plano por la razón que se verá a continuación.

En **L** hay una franja **a b c d** que lo rodea, y la cual se comporta de la siguiente manera: la parte **b d** produce la sombra **b" d"**, pero la parte de sombras **a" d"**, está iluminada por la de **a c** de **L, aclarando así la sombra producida fuera de la circunferencia** a" b" a"**. Igualmente se puede decir de** b d **que ilumina** b" c" y de cualquier otra parte de la faja considerada en L. Luego, la sombra **a" b" a" , constituye sombra pura, y a partir de ella hasta c" d" c" ,** la penumbra mencionada**.**

Rayos de luz divergentes y paralelos:

El caso visto de cercanía entre foco y objeto, nos da la situación de luz y rayos divergentes, en el que la sombra producida es mayor que el cuerpo real.

En cambio, cuando el centro luminoso está en el infinito, se tiene la de luz y rayos paralelos, en el que la sombra se proyecta igual que el cuerpo, sobre un plano de proyección.

Los rayos divergentes se emplean cuando se desea representar las sombras producidas por la iluminación artificial, y en especial para representar las sombras producidas en perspectiva, llegándose a representar en el papel todos los efectos característicos de este tipo de iluminación.

La representación de las sombras, utilizando los rayos luminosos paralelos, es la más corriente en la práctica, por cuanto, salvo alguna excepción, los objetos a determinarles las sombras, se encuentran expuestos a los rayos de la luz natural, llamada solar, por ser éste su origen.

La dirección de estos rayos paralelos, se ha convenido, estableciéndose como norma, el considerarlos con una posición de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, y de atrás hacia adelante. El grado de inclinación de estos rayos puede ser cualquiera, pero el más usual en la práctica es el que tiene una inclinación de 45º con la tierra.

Rayos de luz a 45º:

De todos los rayos de luz paralelos, de las infinitas posiciones o inclinaciones paralelas de los mismos, al que nos referíamos en el párrafo anterior, se adopta el que presenta más conveniencia en la práctica, esto es, inclinado a 45º.

La dirección de estos rayos es la diagonal de un cubo, colocado de tal suerte que la cara **a b c d** (fig. 319) se encuentre frontal al observador, y las caras **b c h g** y **a d e f** le sean perpendiculares, siendo entonces (la diagonal del cubo), la dirección del rayo luminoso de referencia, la recta que partiendo del ángulo α del cubo, llega al opuesto **h** del mismo y cuya dirección será de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, y de atrás hacia adelante. Estos rayos γ, en proyección vertical, están representados por la diagonal γ' del cuadrado **e f g h**, y en la proyección horizontal, por la diagonal γ'' del , cuadrado **c d e h**, las cuales forman un ángulo de 45º con la recta **e h** que corresponde a la línea de tierra.

El empleo de los rayos luminosos inclinados a 45º, tiene una ventaja de indudable importancia sobre cualquier otra inclinación que pudiera tomarse, simplifica mucho los trazados y a la vez permite efectuarlos por separado en cada uno de los planos de proyección; esto último trae nuevas ventajas al dibujante, y es la de poder trabajar con la proyección vertical en una lámina, y la proyección horizontal en otra.

SOMBRA DE UN PUNTO

La importancia del estudio de la sombra producida por un punto del espacio, radica en que en él se basa el estudio de las sombras producidas por los objetos, sobre los planos en los que se proyectan.

Recordemos que la recta se define como una serie sucesiva de puntos colocados alineadamente entre una distancia determinada, y que una curva es la serie sucesiva de puntos equidistantes de otro llamado centro; por lo tanto, las sombras de la recta y de la curva, no son más que las producidas por los sucesivos puntos que las componen.

Sombra proyectada por un punto sobre los planos de proyección:

Siempre considerando que la luz incide a 45º sobre el punto, tendremos tres casos a estudiar:

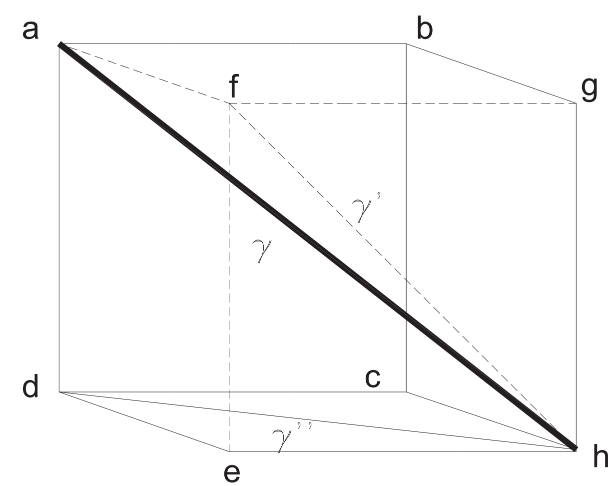


Fig. 319

1) El punto se encuentra más próximo al plano vertical de proyección.

Sea el punto **A** del espacio, cuyas proyecciones sean **a' a**, que producen el rayo de sombra **a v–a' v'** (fig. 320), siendo la traza **v'** de este rayo, el punto de sombra buscado.

La traza horizontal **h** no puede ser sombra del punto, por encontrarse en el segundo cuadrante, es decir detrás del plano vertical; por ello es preciso que punto y traza, están en un mismo cuadrante.

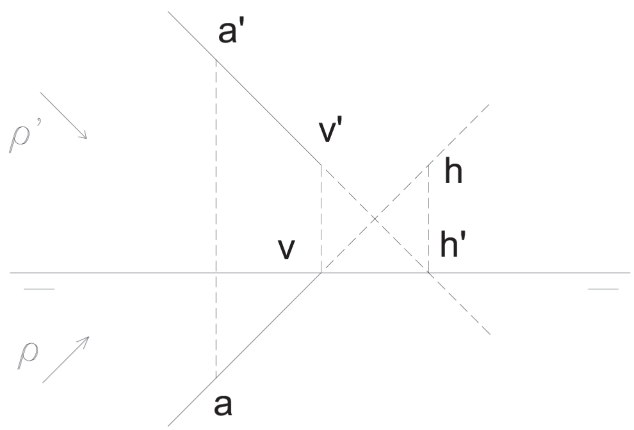


Fig. 320

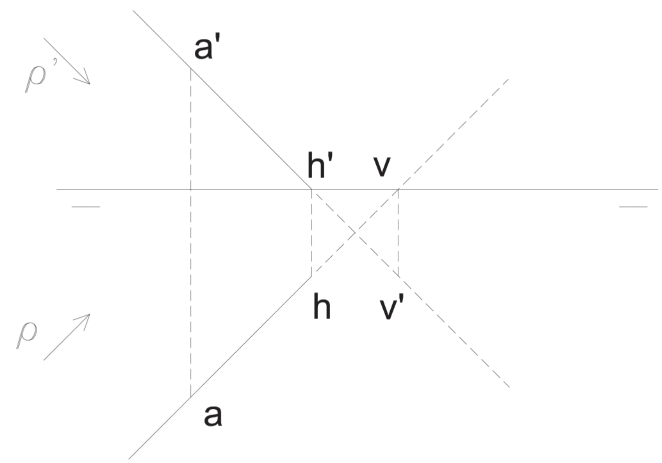


Fig. 321

2) El punto se halla más próximo al plano horizontal de proyección:

En la figura 321 se ve que el desarrolo del problema, es idéntico al anterior, pero los datos aparecen dispuestos en forma inversa, y la sombra producida por el punto dado, se proyecta sobre el plano horizontal de proyección, coincidiendo con la traza horizontal del rayo de luz.

3) El punto equidista de ambos planos de proyección:

Al estar el punto con sus proyecciones equidistantes de los planos de proyección y por tanto de la línea de tierra (pertenencia a los bisectores), su sombra se proyecta sobre la línea de tierra (siempre que el rayo de luz tenga inclinación a 45º).

Debe también considerarse los casos producidos con otros rayos cualesquiera en los que además de la distancdia del punto con respecto a los planos de proyección, tiene gran influencia el grado de inclinación de los mismos.

Si como se ve en la figura 323 se mantienen las distancias de **A** a los planos de proyección, la sombra proyectada se encontrará, ya sea sobre el plano de proyección vertical, sobre el horizontal, o en la línea de tierra, dependiendo del grado de inclinación que tuviese el rayo luminoso. No olvidarse que en general, hallar la sombra de un punto, no es otra cosa que determinar la traza del rayo de sombra de dicho punto sobre el elemento inclinado, tal como se estudió en el sistema diédrico.

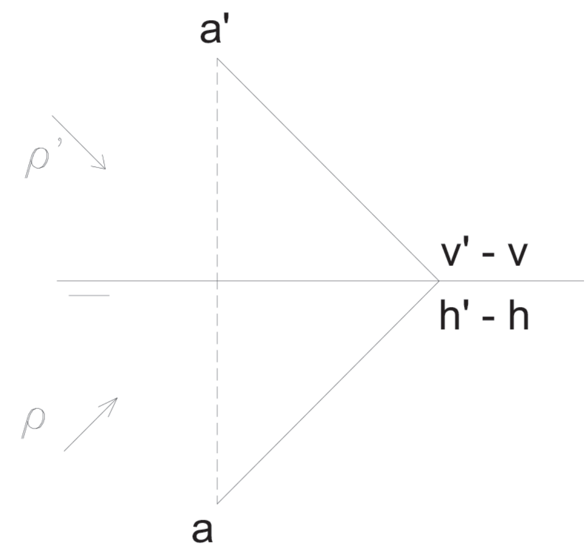


Fig. 322

Sombra proyectada por un punto sobre un plano cualqiera:

Sea **a–a'**, el punto del espacio, y α'–α el plano sobre el que se desea hallar la sombra producida por el punto dado, y ϕ'–ϕ la dirección de la luz.

Para resolver este tipo de problemas, se supone que el rayo de sombra, es una recta; y luego, el problema se reduce a buscar la intersección de recta y plano, siendo éste un simple problema de geometría descriptiva, visto en su momento con lujo de detalles.

En efecto, mediante $\tau'–\tau$, plano proyectante por la recta de sombra, encontramos la recta de intersección **i–i'**, entre ambos planos, siendo **s–s'**, el punto buscado o sombra del punto **A,** sobre el plano $\alpha'–\alpha$, producida por un rayo θ de luz con inclinación de 45º (fig. 324)

Recordemos, que si no hubiera plano de por medio, la sombra del mencionado punto sobre el plano vertical de proyección, sería la traza vertical **v'** de la recta **av–a'v'**.

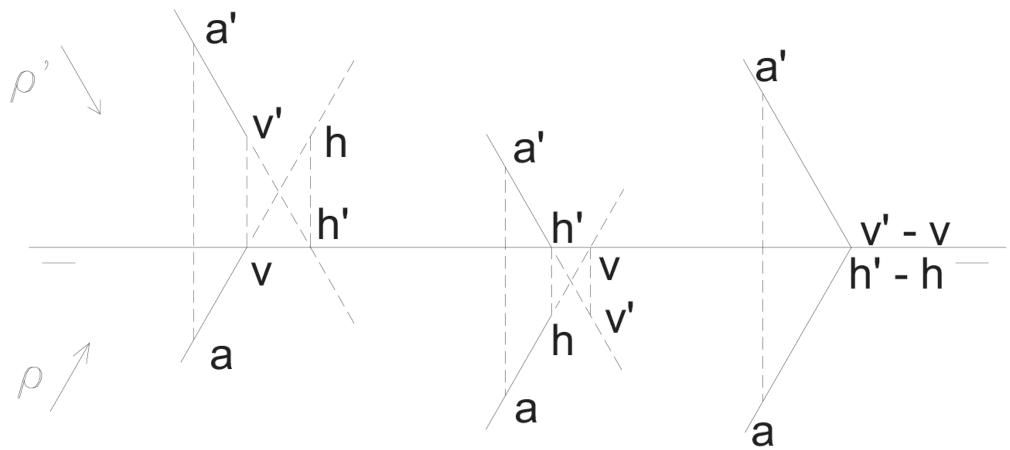


Fig. 323

Sombra proyectada por un punto sobre un cuerpo cualquiera: (fig. 325)

Vamos a considerar entre muchos cuerpos, a un prisma oblícuo que esté apoyado en el plano horizontal.

De la misma manera que hablamos en el acápite anterior, en realidad se trata también acá, de la intersección de recta y prisma, en el que la recta es la sombra que se proyecta del punto sobre el prisma mencionado.

Nos valemos pues de un plano auxiliar que conteniendo al rayo de sombras, corte al prisma dado, bastando así hallar el punto en el cual el rayo se sombras corta a la sección producida por el plano auxiliar en el poliedro.

Sea el punto **a’–a** del espacio, cuya sombra debemos encontrar sobre el prisma graficado en la figura 325, siendo θ la dirección de la luz, y el prisma, uno de base pentagonal cuyos vértices son **b c d e f–b’ c’ d’ e’ f’**.

Por ser el plano **t** perpendicular al plano vertical, se sabe que la sección producida por dicho plano sobre el prisma, va a estar generado por la unión de los puntos **g’ k’ n’ j’ y’–g k n j i**, encontrándolos por los procedimientpos aprendidos al hablar de este tema en el sistema diédrico de este manual.

Como la sección hallada está contenida en el plano auxiliar **t,** y éste a su vez contiene al rayo de sombras, basta prolongar dicho rayo hasta cortar la sección del prisma.

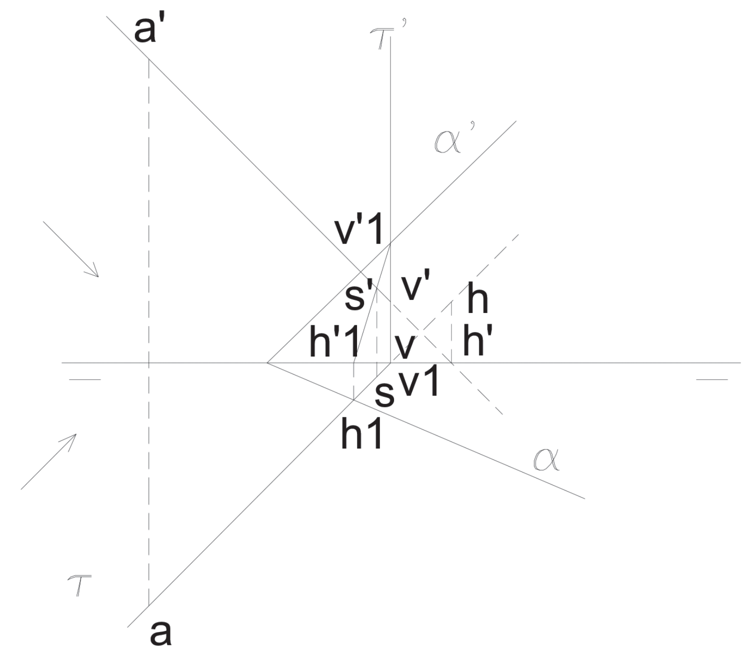


Fig. 324

Prolongando entonces, en la proyección horizontal, el rayo de sombras, hasta cortar en **s** la sección producida por τ en el prisma, y llevándolo a **s’**, por perpendicularidad, a la proyección vertical, se habrá completado el problema, pues **s’–s** es la sombra producida por el punto **a’–a** del espacio, sobre el prisma dado.

Otro procedimiento para hallar la sombra del punto dado, se lo puede ver también en el desarrollo de la figura 326, que es algo más largo que el anterior, pero es bueno conocer, como ejemplo, a fin de generalizar los problemas, y saber que las soluciones indicadas no son las únicas, pero sí las más convenientes.

Consiste también en utilizar un plano auxilia r que contenga el rayo de sombras, pero que no sea perpendicular a los planos de proyección (proyectante), sino oblícuo.

Al igual que en el ejemplo anterior, primero que nada debe encontrarse la sección producida en el prisma de base **b c d e f–b' c' d' e' f'**, por el plano α que contiene al rayo de luz que proyecta la sombra del punto **a'–a** sobre el cuerpo mencionado.

Como se recordará, cuando se vio el presente tema en el sistema diédrico, para encontrar la sección buscada, partimos mediante la inclusión de un plano proyectante (en este caso vertical), por la arista **b b 1**, que al cortarse con el plano α, nos determina el primer punto, el **g**, de la sección resultante.

Luego, con auxilio de la traza horizontal **a** del plano secante, mediante el uso de los puntos **1, 2, 3**, señalados en dicha traza de la figura 325, encontramos los puntos **g k j in**, proyección horizontal de la sección; llevando por perpendiculares estos puntos encontrados, a la proyección vertical, encontramos los **g' k' j' y' n'**, proyección vertical de la misma sección.

Una vez encontrada la sección, como esta está contenida en el plano α, y el rayo de sombra también, basta con prolongar dicho rayo en sus proyecciones (a partir de **a'–a**), hasta cortar la sección en el punto **s'–s**, el cual es la sombra buscada.

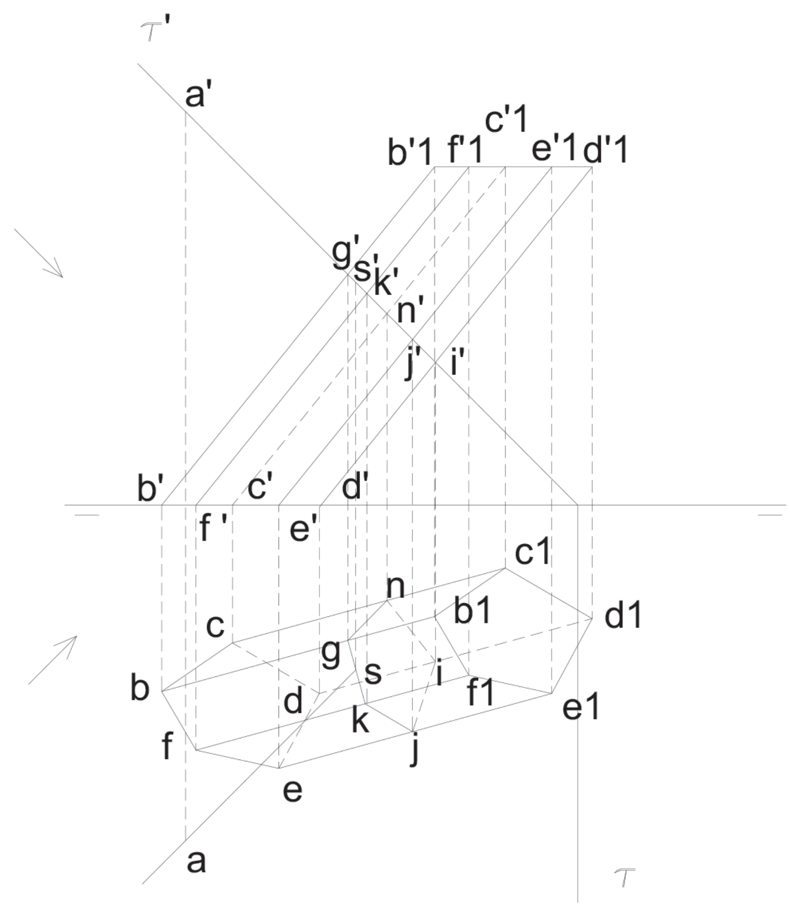


Fig. 325

Estos mismos procedimientos pueden ser empleados para encontrar las sombras de un punto, sobre cualquier otro cuerpo geométrico, no siendo por lo tanto necesario ver en este tratado, los procedimientos que deban emplearse para cada uno de los diferentes cuerpos de los que se habló en la parte del sistema diédrico de este tratado de geometría descriptiva.

LA RECTA

La recta, como se sabe, es una serie sucesiva de puntos alineados entre dos extremos, por lo tanto, para hallar la sombra producida por una recta, basta hallar la serie sucesiva de puntos de sombra producidos por aquellos que componen dicha recta.

Como ya sabemos encontrar la sombra de un punto, basta por tanto, aplicar estos conocimientos a dos puntos de una recta, y unirlos entre sí, somo se ve en la figura 327, en la que se observa que la sombra de la recta **AB**, es la unión de la sombra de sus puntos **A** y **B**, esto es **ab**.

La sombra de una recta, es otra recta, siempre y cuando ésta se proyecte sobre una superficie plana.

El ejemplo de la figura 326, corresponde al caso más sencillo, en el que la sombra de una recta es proyectada en su totalidad en un solo plano; pero corrientemente, en

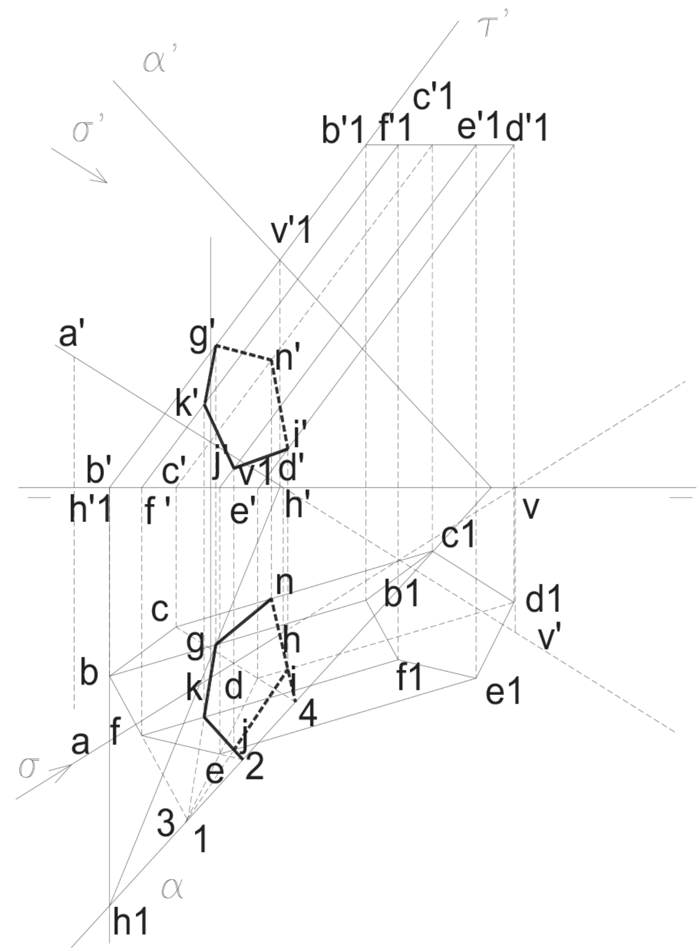


Fig. 326

la práctica, dicha sombra se suele proyectar en dos o más planos simultáneamente. Si por ejemplo tenemos un poste vertical, clavado en el suelo, su sombra se extenderá por él a partir del mismo pie de dicho poste, hasta limitarse en el punto de sombra del extremo superior; pero si el poste dado está próximo a una pared, de tal manera que la longitud de la sombra sea mayor que la distancia del poste a dicha pared, entonces sucederá lo que tenemos en la figura 328; la sombra, al llegar al pie de la pared **P**, se corta en el punto **c** de inflexión, para continuar luego desarrollándose sobre la pared **P** en sentido vertical, hasta quedar limitada por el punto de sombra extremo **a.**

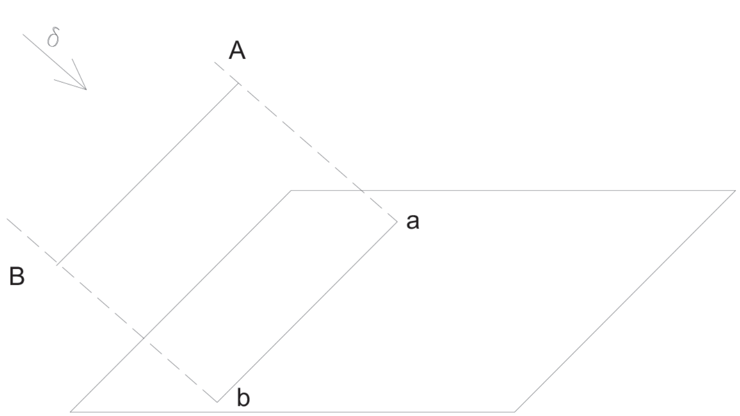


Fig. 327

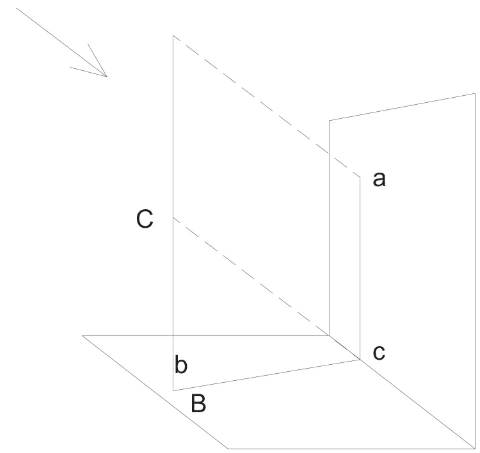


Fig. 328

Sombra producida por una recta sobre los planos de proyección:

Cuando hablábamos en el sistema diédrico sobre la recta, veíamos diferentes posiciones que podía tener ésta en el espacio, respecto de los planos de proyección (se llega a contar treinta y siete posiciones, sin contar su relación con los bisectores); pero en este acápite, vamos a reducirnos a ver sólo dos posiciones como más generales, pues las otras, de una manera u otra pueden reducirse a éstas.

En el primer cuadrante, es donde los objetos son visibles, por eso nos consideramos siempre situados en él.

Primer caso:

Sombra producida por una recta en posición oblícua, cortando a la línea de tierra.

En la figura 329, tenemos la recta **ab–a'b'**, la cual corta a la línea de tierra en el punto **b–b'**, que corresponde a sus trazas; la dirección de la luz dada, viene por el ángulo δ . Como primera medida debemos hallar las sombras proyectadas por los puntos extremos de la recta dada. El extremo **b–b'** de la recta, por hallarse en la línea de tierra, carece de cota y alejamiento; luego su sombra proyectada, será precisamente el mismo punto **b–b'**; la sombra del punto **a -a'**, se determina por el procedimiento estudiado anteriormente, donde se trató de la sombra producida por un punto aislado del espacio; este punto se lo obtiene en **a"**.

Halladas las sombras proyectadas por los dos puntos extremos de la recta, sólo resta unir los mismos, con lo cual se tiene la sombra **a"–b- b'** buscada.

Segundo caso:

Sombra proyectada por una recta oblícua, a los planos de proyección, sin cortar la línea de tierra:

Sea la recta **ab–a'b'**, y δ **,** la dirección de la luz.

Primero se hallan las sombras proyectadas por los puntos extremos **a–a'** y **b–b'** de la recta dada, por el procedimiento conocido; éstos se los obtendrá uno en cada uno de los planos de proyección, como se aprecia en la figura 329, en **a"** y **b"** respectivamente; por lo tanto se ve que hay un punto **c"** de inflexión de la sombra sobre la línea de tierra, es decir donde la sombra pasa de un plano de proyección, al otro. Se debe hallar ese punto para poder así trazar la recta de sombra sobre ambos planos de proyección

El procedimiento a seguir, está compuesto de los siguientes pasos (fig. 330)

- Se hallan las sombras producidas por los puntos extremos **a–a’** y **b–b’** sobre el plano de proyección horizontal; estos serían los **a”** y **b”**, este último en el segundo cuadrante, es decir sobre el plano horizontal posterior de proyección, detrás del vertical, por tanto invisible; uniendo ambos puntos se obtiene el punto **c”** de inflexión. Simultáneamente se ha obtenido la sombra **a”–c”**, producida por el segmento **ac–a’c’** sobre el plano horizontal.

- La sombra producida por el otro segmento **c b–c’ b’**, corresponde sobre el plano vertical de proyección; para determinarla no falta más que unir el punto **c”** de inflexión con el **b”**, sombra del extremo **b b’** previamente hallada. Con esto se habrá completado la sombra **a” c” b”** producida por la recta dada sobre ambos planos de proyección.

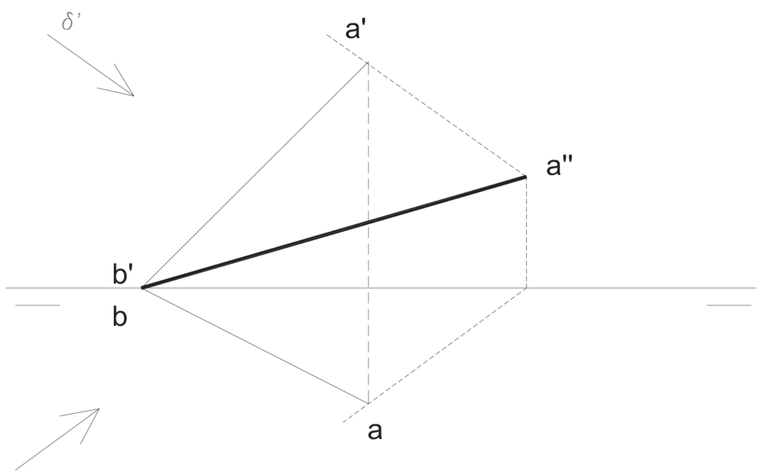


Fig. 329

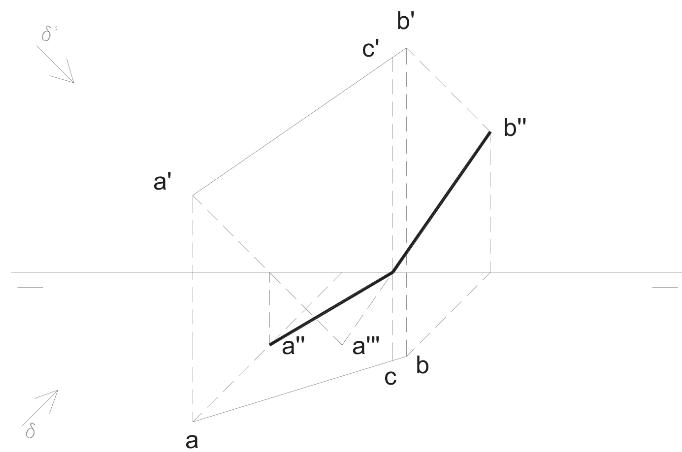


Fig. 330

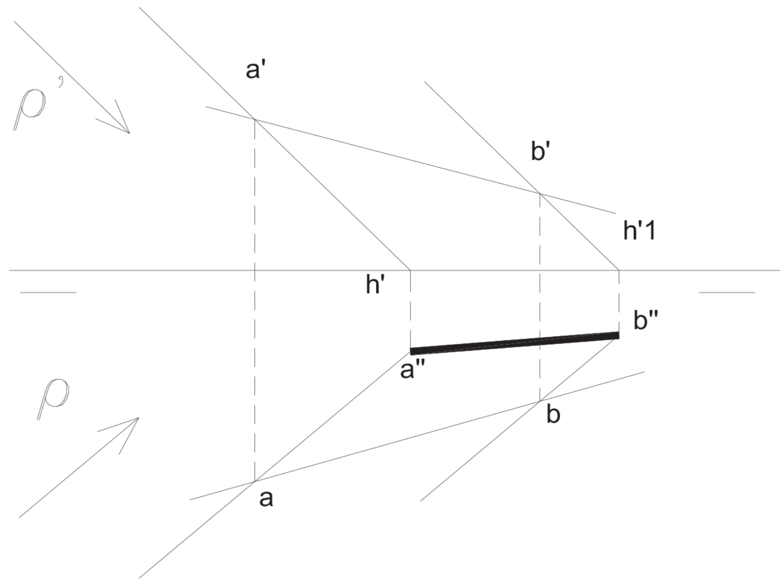


Fig. 330a

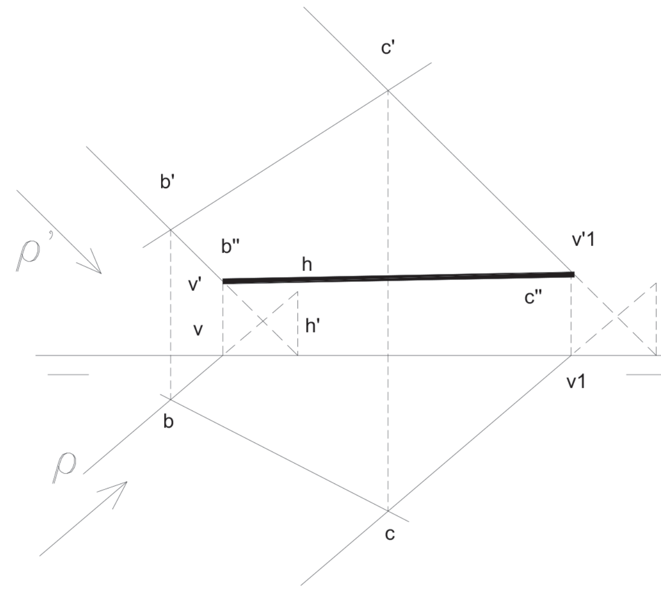


Fig. 330b

EJEMPLOS DE SOMBRAS DE RECTAS SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Damos algunos ejercicios de casos de interseccion de rectas con los planos de proyección indicando específicamente de qué tipo se trata cada uno de ellos:

a) Sombra de una recta sobre el plano horrizontal (la recta está con ambos puntos más cerca del horizonal que del vertical)

b) Sombra de una recta sobre el plano vertical (la recta se encuentra más cerca del vertical que del horizontal

c) Sombra de recta en ambos planos de proyección (presenta un punto de inflexión o – o' en LT)

d) Otro caso similar al anterior; en ambos las sombras de los extremos del segmento, coinciden con las trazas de la rectas. En ambos ejercicios hay que tomar en cuen a que como puntos auxiliares se usa ala sombra virtual (las con tres comillas:'")

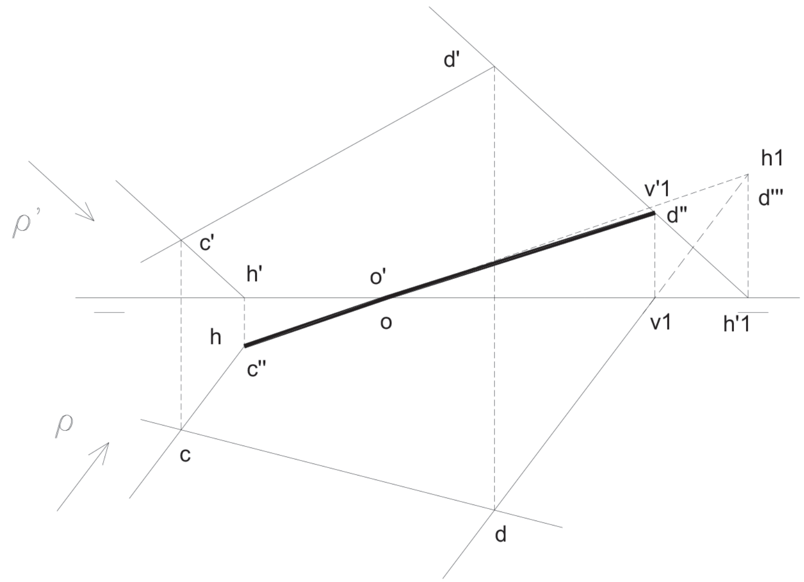


Fig. 330c

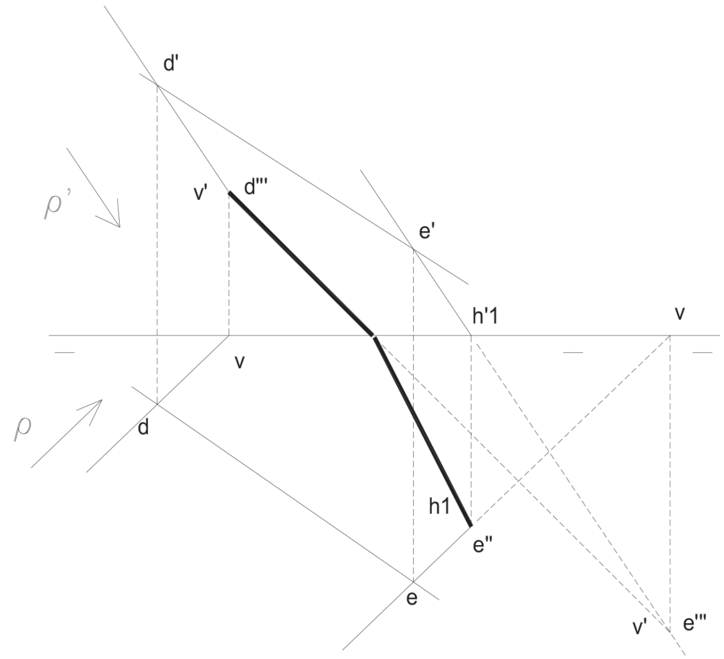


Fig. 330d

FIGURAS PLANAS

La sombra de un polígono (figura plana limitada por rectas y que contiene además, ángulos y vértices), es a su vez otro polígono con el mismo número de lados, ángulos y vértices. Así la figura 330 nos muestra que la sombra del polígono **a b c d e**, es **a' b' c' d' e'**, sobre el plano α.

La sombra proyectada puede ser igual (proyección paralela), o mayor, si el foco de luz está relativamente cerca (ver figura 316), tener una inclinación cualquiera, si los rayos son oblícuos, o ser una simple recta, si el polígono está de perfil, esto es en el sentido de los rayos de luz.

Sombra proyectada por un polígono horizontal, sobre los planos de proyección:

Sea el polígono **a b c d e f–a' b' c' d' e' f'**, de la figura 332, cuya sombra se debe determinar, y θ–θ' la dirección de los rayos de luz. Para determinar la sombra producida por este polígono, se la puede hallar por sus lados, o por sus ángulos, cosa que no varía.

Se halla la sombra producida por el lado **a b–a' b'**; considerando este lado como una recta, no se tiene más que aplicar el procedimiento explicado anteriormente; esta sombra sería la **a" b"**. Lo mismo habría que hacer para los subsiguientes, determinando de esta manera la sombra de la figura, por la unión de todos los puntos cuyas sombras se hallan. Obsérvese que la sombra del punto **e**, aparece debajo de la línea de tierra, esto es en la traza horizontal de la recta (rayo de luz) que pasa apor él. Por tanto la unión de **f"** y **d"** con **e"** dará la sombra buscada; pero como las sombras de todos los otros vértices del polígono son en realidad sus trazas verticales, y la traza vertical de la recta por **e** es **e" 1**, se debe unir tanto **f"** y **d"** con **e" 1**, rectas que al llegar a la línea de tierra nos determinan los puntos de inflexión **y** y **x,** siendo éstos los puntos que deben unirse con **e"**, sombra de **e**.

Por tanto, la sombra del polígono considerado en estas líneas, es **a" b" c" d" e" f"**.

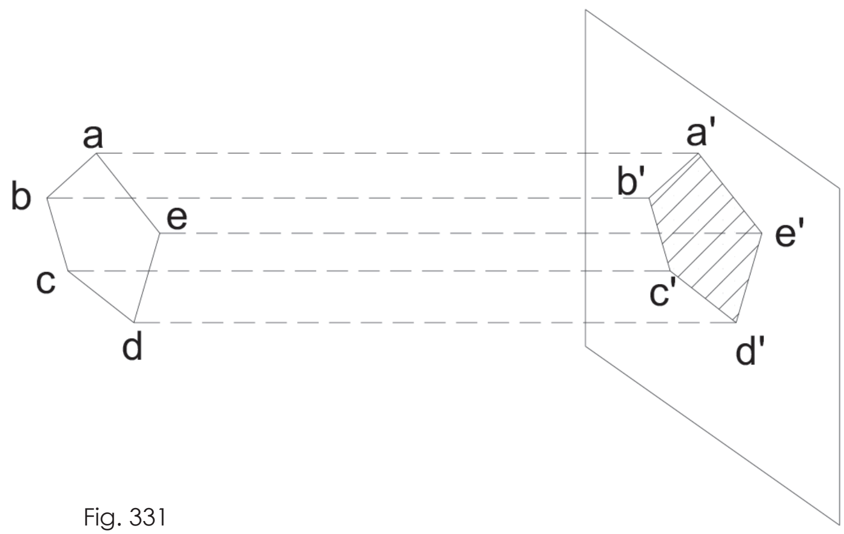


Fig. 331

Sombra proyectada por un polígono vertical sobre los planos de proyección:

Sea el polígono que por ser vertical, su proyección horizontal es una paralela a la línea de tierra, **a, b, c, d, e, f,** y la proyección vertical es **a', b', c', d', e', f'.** (fig. 333)

En el presente caso, los puntos que no presentan confusión son las trazas verticales de las rectas paralelas al rayo de luz y que pasan por **a, b, c,** y **d**, esto es **a", b", c"** y **d"**.

Los rayos que pasan por **e** y **f,** presentan inflexión, pues sus sombras son las proyecciones horizontales **e"** y **f"**; pero para ello unimos la traza vertical **d"**, con la **e" 1** (también vertical) que al cortar la línea de tierra, produce inflexión en el punto **x**. De ahí que desde **x** unimos con la traza horizontal **e"**.

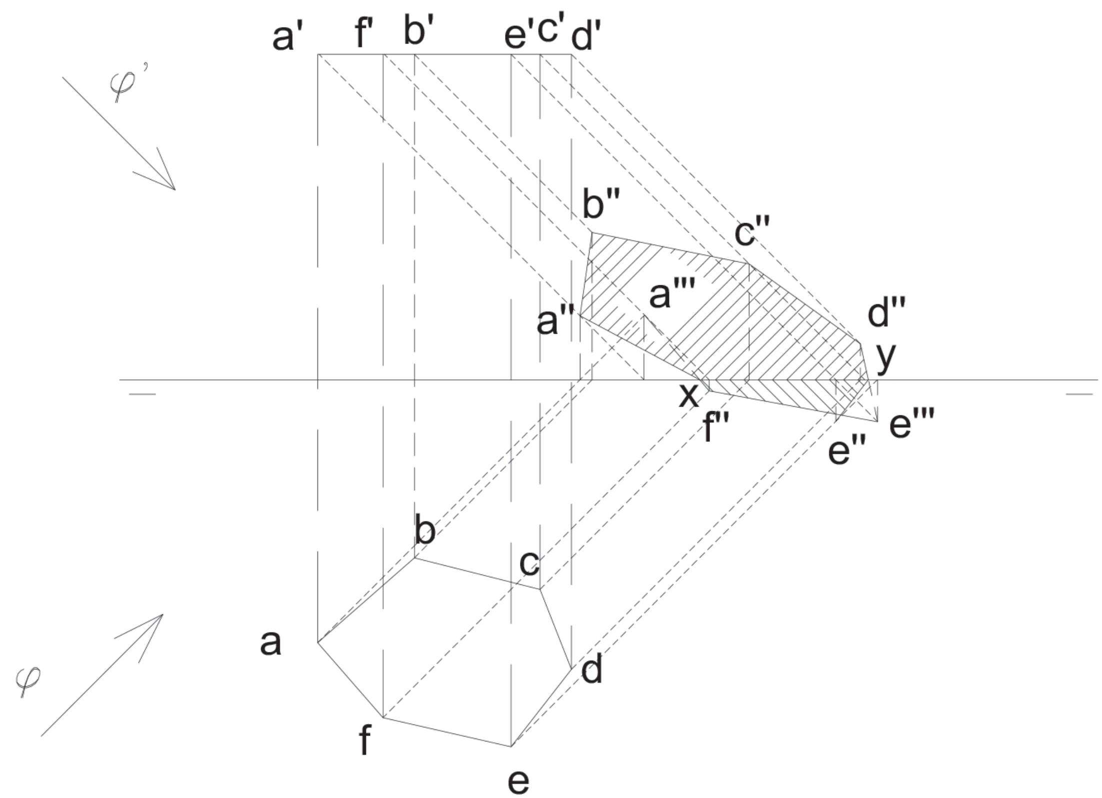


Fig. 332

El otro punto de inflexión se presenta al unir la traza vertical **a"** con la **f" 1**, cuya sombra, al pasar por la l'nea de tierra, presenta el **y,** que finalmente unida con **e"**, determina la sombra **a", b", c", d", e", f".**

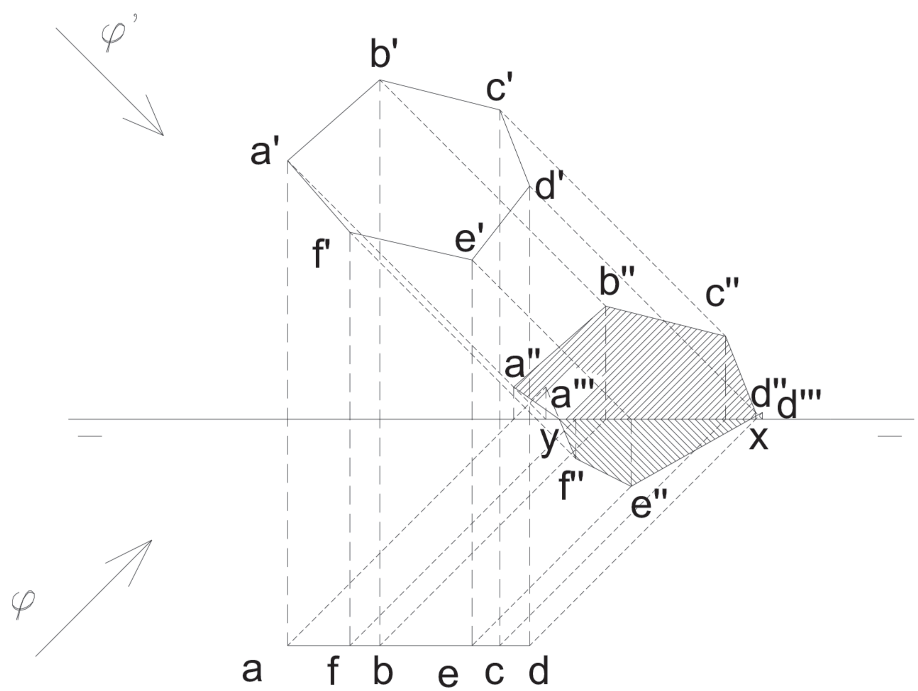


Fig. 333

Sombra producida por un polígono, oblícuo sobre los planos de proyección: (fig. 334)

De la misma manera que se ha venido procediendo, se hace en el presente caso, en donde se ve que los vértices de sombra que se proyectan son: de **a**, el **a"**; de **b**, el **b"**; de **c**, el **c"**; y de **d**, el **d"**, todos ellos en el plano vertical, (fig. 334) pues los puntos mencionados, como se sabe, son las trazas verticales de los rayos que pasan por dichos puntos; los vértices **e** y **f**, tienen sus sombras en **e"** y **f"**, ambas en el plano horizontal. Por tanto, las sombras de **d e** y **a f** presentan inflexión en la línea de tierra, **y**, en el primer caso, y **x**, en el segundo. Ya se sabe que desde dichos puntos de inflexión, se une a las sombras que se encuentran en el plano horizontal, esto es, **y**, con **e”** y **x**, con **f”**.

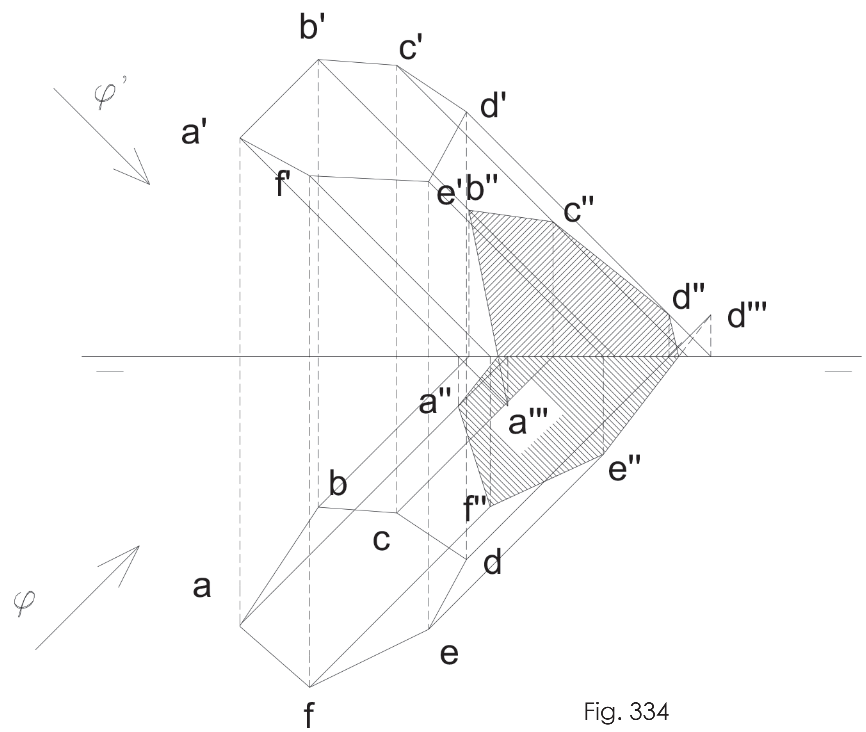


Fig. 334

Se habló en el sistema diédrico (fig.231), y en este capítulo, sobre la ley de afinidad que rige a este tipo de proyecciones, que esteblece una relación entre el polígono del espacio dado, y su sombra: esta ley dice que las trazazs del plano que contiene al polígono del espacio, es el eje de afinidad entre dicho polígono y su sombra; en efecto, prolongando los lados del polígono dado y los de sus sombras corespondientes, estos se cortan de dos en dos sobre las trazas del plano indicado. De ello se dice que el polígono del espacio y su sombra sobre el plano de proyección, son dos figuras afines.

Para este ejercicio se utiliza un polígono exagonal **a' b' c' d' e' f'–a b c d e f,** contenido en el plano α'–α, para lo cual, sobre tres rectas del plano (oblícua, horizontal y frontal), se ubica 6 vértices que unidos entre sí nos dan la figura exagonal irregular que va a producir sombra sobre los planos de proyección de la siguiente manera:

Partiendo del lado **b c**, (fig. 335) se halla las respectivas sombras de sus extremos de la forma conocida, en **b"** y **c"**. Obtenidas éstas, se prolonga **c' d'** hasta α', obteniendo **k'**; de **k'** se une con **c"**, siguiendo hasta cortar la dirección del rayo de luz por **d'**. Prolongando **d" c"** hasta α', se tiene **i'**. Desde allí, se une con **d"**, prolongándose hasta encontrar la paralela al rayo de luz que pasa por **e'**, el mismo que no se encuentra, pues se nos interfiere la línea de tierra; eso quiere decir que esta recta tiene en ella un punto de inflexión **x.**

Tomando ahora el lado **ab**, y prolongado hasta α**,** se tiene **o**; la traza horiantal del rayo por **b**, es **b" 1**. Uniendo ahora **o b" 1**, se encuentra **a"** en la paralela a θ por **a**, que prolongando hasta la línea de tierra, se ubica **y**, otro punto de inflexión.

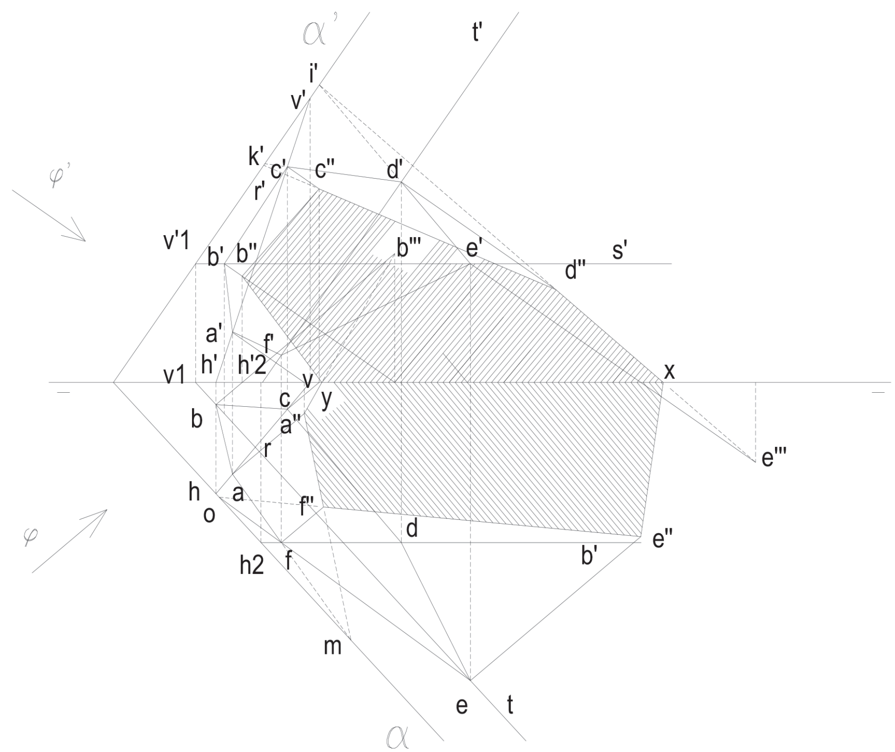


Fig. 335

Al prolongarse **af** hasta **a,** se ubica **m**, que unido con **a”,** corta a la paralela a θ por **f**, en **f”**.

Finalmente para encontrar **e”,** se prolonga **ef** hasta **l** en **a**; uniendo **l** con **f”**, se corta a la paralela a θ por **e**, en **e”**, completando así la sombra de las seis rectas.

De esta manera la sombra del exágono irregular es **a” y b” c” d” x e” f”.**

Esto es debido a que las trazas α–α’ no son sino las rectas de intersección entre el plano α–α’ y los de proyección, y por lo tanto están contenidas simultáneamente en el plano α–α’ y en los de proyección horizontal y vertical respectivamente.

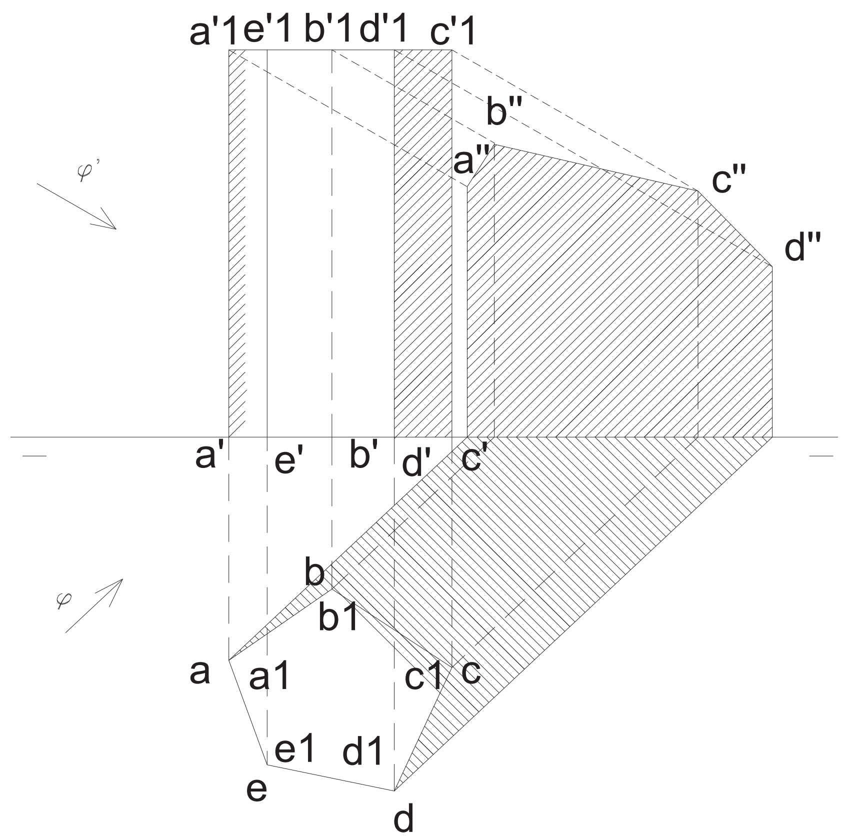


Fig. 336

POLIEDROS

El estudio de las sombras, tanto propias, como proyectadas, de los volœmenes geométricos, se basa en lo ya visto hasta ahora, es decir, en la determinación de las sombras producidas por el punto, la recta y el plano, lo que se aplica según convenga, al caso planteado para facilitar los trazados.

Por ser los poliedros cuerpos formados por caras laterales, y bases superior e inferior, todos polígonos, se infiere que su sombra será un polígono determinado por las aristas del poliedro que contenga la separatriz entre parte iluminada y la que está en sombras.

Sombra propia y proyectada por un prisma sobre los planos de proyección:

Se tiene como ejemplo, el prisma recto pentagonal en la figura 336, cuyas bases son **a b c d e–a' b' c' d' e'**.

Cuando se habló sobre intersección de plano y prisma en el sistema diédrico, se comentaba sobre contorno aparente, que ahora va a ser de gran ayuda para considerar la sombra propia del prisma en cuestión. Este contorno aparente, permite ver la separatriz de luz y sombra propia del prisma.

Si θ y θ' son las direcciones del rayo de luz, se nos permite ver en proyección vertical, las caras que tienen sombra propia; éstas son: **a' b' c' d'–a'1, b'1, c'1, d'1,** y en proyección horizontal **a b c d–a1, b1, c1, d1.** En esta serie de sombras, se ve que las aristas de los extremos son **a' a'1** y **d' d'1**; estas dos aristas son parte de la separatriz de luz y sombra del prisma en cuestión, y por ello las caras correspondientes a las aristas **ab**, **bc, y cd**, estarán en sombra.

Se sabe que la dirección de la luz, es de atrás hacia adelante, y de arriba hacia abajo, luego, la base superior del prisma se encuentra iluminada, y la inferior, si el poliedro no estuviera apoyado en al plano horizontal, estaría en sombra; en base a ello ya se puede determinar la separatriz de luz y sombra del prisma, en su totalidad: **a'1–b'1–c'1–d'1–d'–c'–b'–a'**. (fig. 335)

Falta solamente ver ahora, la sombra que el cuerpo considerado, proyecta en los planos de proyección. Basta simplemente seguir en proyección horizontal, la dirección de las sombras por los rayos que pasan por los extremos a **y** d, **y encontrar las respectivas trazas de todas las aristas, por los métodos ya conocidos, unidos los cuales, darán la sombra producida por el prisma en los planos de proyección Sombra propia y proyectada por un poliedro sobre los planos de proyección:**

Se considerará el cubo de la figura 337, y la dirección θ–θ' de la luz. Siguiendo el mismo procedimiento estudiado en los párrafos anteriores, se determina la separatriz del volumen dado, **b' c' d' e' f' g' b'–b c d e f g b**, que nos delimita la sombra propia de dicho cuerpo. Los rayos rasantes de dicho poliedro deben trazarse en ambas proyecciones observando cuidadosamente la figura.

La sombra proyectada por el cubo se la halla determinada por las sombras de **bc–b'c', cd–c'd', de–d'e', ef–e'f', fg–f'g', gb–g'b'**, que corresponde a la separatriz hallada la misma que está en **b" c", c" d", d" e", e" f", f" g", y g" b".**

Al haber obtenido **g", b", c", y d"**, sobre el plano vertical, y las demás, **f" y e"**, sobre el horizontal, se sabe que la sombra proyectada por el poliedro, se encuentra desarrollada sobre ambos planos. Al hallar las **d" e"** y **f" g"**, se han determinado los puntos de inflexión **x** y **y.**

Al haber obtenido **g", b", c", y d",** sobre el plano vertical, y las demás, **f" y e",** sobre el horizontal, se sabe que la sombra proyectada por el poliedro, se encuentra desarrollada sobre ambowss planos. Al hallar las **d" e"** y **f" g"**, se han determinado los puntos de inflexión **x** y **y**,

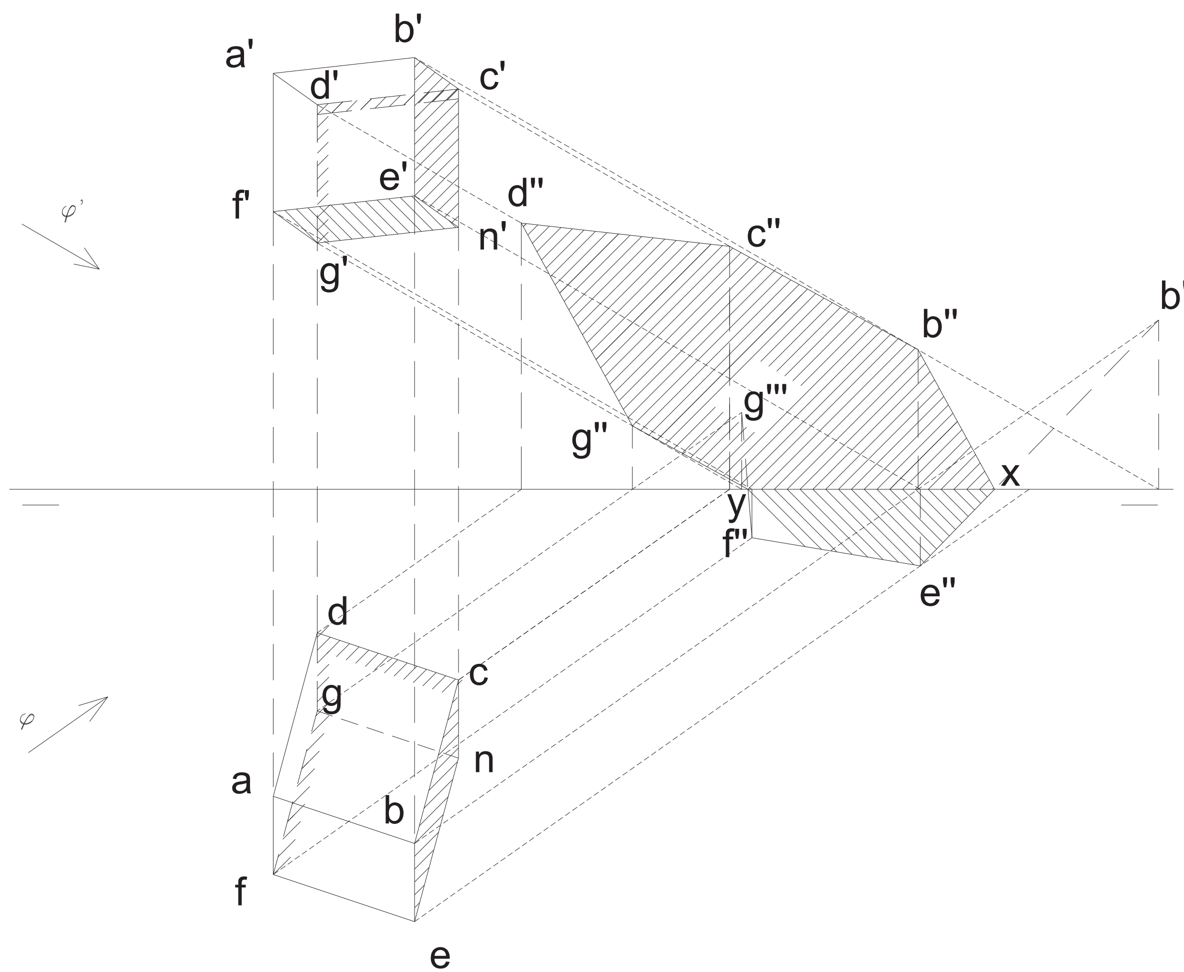


Fig. 337

BIBLIOGRAFIA

- GEOMATRIA DESCRIPTIVA, Izquierdo Ascensi, Ed. Paraninfo
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA, Donato Di Pietro, Ed. Alsina
- DIEDRO DIRECTO, Vicente Giménez
- GEOMATRIA DESCRIPTIVA, Angel Taibo
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA APLICADA, Miguel Bermejo Herrera
- GEOMETRIA PROYECTIVA, Alvaro Rendón Gómez
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA, Mario González Monsalve
- GEOMETRIA PAARA INGENIEROS, Carlos Cobos
- EJERCICIOS DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA, Izquierdo Ascensi
- MANUAL DE TRAZADO DE SOMBRAS, Fadu
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA, Alfredo Dos Reis Principe Junior, Livraria Novel
- GEOMETRIA DESCRIPTIVA, B. Leigton, Reverté Barcelona